

# Symmetrie

## „Ebenmaß“ in Mathematik und Naturwissenschaften

### Eine Übersicht anhand von Beispielen

WILLI KAFITZ \*)

#### **Abstract:**

Symmetry is important in nearly all natural sciences. However, less for its aesthetic characteristics, but the structural role it plays.

In chemistry for example, it is used to explain molecular oscillations, while in crystallography it is the basis for all classifications of crystal forms.

In physics and cosmology on the other hand, the term 'Symmetry' is used in a more abstract way ranging from laws of conservation to explaining the moments after the Big Bang.

Regardless, in all cases math is required to describe "Symmetry" adequately, in particular its field of Group Theory.

The following article is intended to illustrate a small number of symmetry effects and their mathematical theory in an easily understandable way.

#### **Zusammenfassung:**

Symmetrie ist in fast allen Naturwissenschaften von Bedeutung. Allerdings ist dabei weniger die ästhetische Dimension relevant, sondern die Symmetrie als Strukturierungs- und Ordnungsmerkmal. Sie hat oft unterschiedliche Ausprägungen: z.B. in der Chemie als Mittel, um Molekülschwingungen zu verstehen. In der Kristallographie dient sie der Klassifizierung von kristallinen Formen. Sehr abstrakt ist der Symmetriebegriff in der Physik oder der Kosmologie: Er geht von klassischen Erhaltungssätzen bis hin zum Verständnis, was in den ersten Momenten nach dem Urknall geschah. Immer ist die Mathematik gefordert. In vielen Fällen benötigt man mit der Gruppentheorie ein wichtiges Teilgebiet der Mathematik. Der vorliegende Beitrag soll anhand einiger weniger Beispiele die Bandbreite der Symmetrieeffekte in einzelnen Naturwissenschaften und der Mathematik auf möglichst leicht verständliche Art und Weise aufzeigen.

**Keywords:** symmetry, group theory, symmetry in molecules, symmetry in biology, symmetry and conserved quantities, spontaneous symmetry breaking

\*) Dr. Willi Kafitz, Rother Weg 3, D-35112 Fronhausen, [willikafitz@web.de](mailto:willikafitz@web.de)

Dieser Beitrag erscheint auch in gedruckter Form in der "Oberhessischen Naturwissenschaftlichen Zeitschrift", Volume 67, Gießen 2017

## Einleitung und Problemstellung

*Die Symmetrie ist diejenige Idee, mit deren Hilfe der Mensch im Laufe der Jahrhunderte versuchte, Ordnung, Schönheit und Vollkommenheit zu begreifen und zu schaffen.* Hermann Weyl<sup>1</sup>

Wenn wir das Wort „symmetrisch“ oder „Symmetrie“ hören, so glauben wir oft ohne zusätzliche Erklärung zu wissen, was gemeint ist. Schließlich haben wir alle symmetrische Figuren betrachtet und dabei die Muster erkannt. Dieses intuitive Verständnis muss hier hinterfragt werden. Ein (reales oder virtuelles) Objekt soll in diesem Beitrag „symmetrisch“ heißen, wenn es durch eine Operation, die Symmetrioperation oder Deckoperation, in eine Lage überführt werden kann, die nicht von der Ausgangslage oder -situation unterscheidbar ist. Im weitesten Sinne ist dies immer eine Koordinatentransformation. Diese mathematische Sichtweise ist mit knapp 200 Jahren relativ neu, hat keine antiken Wurzeln und unterscheidet sich radikal von der in der Kunst<sup>2</sup>. Ausgeklammert bleibt deshalb hier in diesem Beitrag die ganze Vielfalt an kunsthistorischen oder architektonischen Aspekten.

Drehung um eine Achse oder Spiegelung an einer Ebene sind in diesem Sinn oft unmittelbar als Symmetriekriterium einsichtig. Auch die Punktsymmetrie, wie sie z.B. beim Buchstaben N vorkommt, ist leicht zu verstehen. Schwieriger wird es bei der mathematischen Beschreibung oder bei der Frage, wie der Begriff in einzelnen naturwissenschaftlichen Disziplinen zu verstehen ist. Komplex, aber uns noch gut zugänglich, sind Symmetrien in der Kristallographie bzw. Mineralogie. Sie beziehen die 3. Dimension mit ein, was ein gewisses räumliches Vorstellungsvermögen erfordert. Es bleibt aber immer eine Symmetrie räumlicher und gegenständlicher Strukturen.

In der Physik gehen wir wie selbstverständlich davon aus, dass ein Experiment, das sich auf elementare Naturgesetze stützt, zeitlich („zeitinvariant“) und örtlich („translationssymmetrisch“<sup>3</sup>) unabhängig verläuft. Auch die Rotationsinvarianz, also Richtungsunabhängigkeit elementarer Gesetze, gehört dazu. Für die makroskopische Welt reichen kontinuierliche Symmetrien wie die Eichtransformationsinvarianz, also, salopp gesagt, die Unabhängigkeit des gewählten Koordinatensystems wie z.B. des Nullpunktes<sup>4</sup>. Unanschaulich wird der Symmetriebegriff in der Elementarteilchenphysik. Hier benötigt man diskrete Symmetrien wie die CPT-Invarianz<sup>5</sup>. Darauf wird noch einzugehen sein. Physikalische Symmetrie bezieht sich auf Erhaltungsgrößen.

---

1 Zitiert nach <http://www.alt.mathematik.uni-mainz.de/Members/mattheis/listen/mathphorismen> 03.12.2016

2 Siehe Anmerkung 59

3 Der Begriff ist in Mathematik, Physik und Kristallographie unterschiedlich besetzt.

4 Vorsicht: Dies gilt nur für willkürlich gewählte Skalen, nicht z.B. für Energie.

5 **C** = Ladungskonjugation, **P** = Räumliche Spiegelung, **T** = Zeitumkehr

Das intuitive Verständnis kommt oft ganz ins Wanken, wenn weitere Ordnungskriterien ins Spiel kommen. So stellt in der Natur die Periodizität oder Periodik eine Symmetrie bzgl. zeitlicher Verschiebung dar. Beispiele sind die sogenannte biologische Uhr, biologische/biochemische Oszillationen, Biorhythmik, Chronobiologie, Quasiperiodik, Jahreszyklen der Jahreszeiten, etc. Eine Tierfährte bildet die dynamische Abfolge in eine räumliche Struktur ab. Im weitesten Sinne ist auch eine anlassbezogene Periodik eine Form von Symmetrie. Wir sehen gleiche oder ähnliche Reaktionen in der Natur z.B. bei Dürre, Regen oder Feuer. Auch Symmetrien bzgl. Dehnungs- oder Streckungsoperationen kann man identifizieren („Skalensymmetrie“ im Sinne von Skaleninvarianz). Sie gehen oft mit Selbstähnlichkeit einher („Fraktale“). Ein einzelnes Farnblatt ist dem ganzen Wedel, ein Blumenkohlröschen dem ganzen Blumenkohl selbstähnlich. Eine regelmäßige Streckung als Symmetrieoperation kann den kleineren Teil im Prinzip auf das größere Objekt abbilden und eine Stauchung wirkt umgekehrt. Im Goldenen Schnitt ist das Verhältnis der ganzen Strecke zum größeren Teil gleich dem Verhältnis des größeren zum kleineren Teil. Kann man so weit gehen, diese Selbstähnlichkeit von Strecken als Symmetrie zu bezeichnen? Gilt dies dann auch für ein Goldenes Rechteck, ein Goldenes Dreieck, die Goldene Spirale, den Goldenen Winkel oder bei sonstigen gleichbleibenden Faktoren? Ist somit Proportionalität auch Symmetrie?

An diesen Überlegungen sieht man: Man wird möglicherweise Symmetrie spezieller fassen müssen, man wird sicher gleiche Muster in unterschiedlichen Disziplinen finden und man wird sich im Zweifelsfall an der mathematischen Systematik orientieren müssen, um prinzipielles Übertragen und die nötige exakte Beschreibung ohne sprachliche Unschärfe zu gewährleisten. Es geht aber andererseits um Naturwissenschaften, die immer mit Naturbeobachtung und ihrer exakten Beschreibung beginnen oder zumindest die Naturbeobachtung als entscheidendes Kriterium für die Verifizierung oder Falsifizierung von postulierten Naturgesetzen heranziehen müssen. In diesen Fällen ist die Mathematik oder die sprachliche Logik Mittel zum Zwecke einer möglichst exakten Beschreibung und sie soll es in diesem Beitrag auch wenigstens skizzenhaft bleiben. Es gilt gerade beim Symmetriebegriff der Satz von Immanuel Kant:

*In jeder reinen Naturlehre ist nur so viel an eigentlicher Wissenschaft enthalten, als Mathematik in ihr angewandt werden kann<sup>6</sup>.*

Es bietet sich also für diesen Aufsatz keine uneingeschränkt natürliche Gliederung an. Werden die einzelnen naturwissenschaftlichen Disziplinen beispielhaft auf Symmetrien untersucht, so liefert diese Vorgehensweise

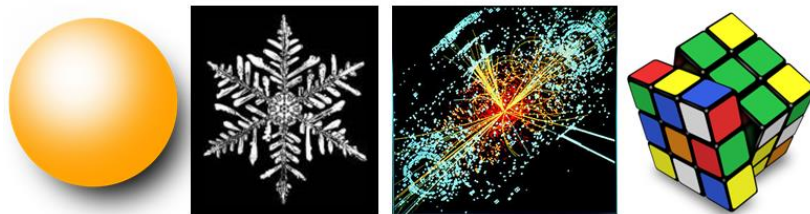
---

6 Zitiert nach Hans Josef Pesch, Schlüsseltechnologie Mathematik, G. B. Teubner, Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden 2002, S. 21.

lediglich heuristische Beispiele. Wird die Mathematik als alleiniges Vorgehensmuster verwendet, so besteht die Gefahr, dass der Naturbezug verloren geht. Der Beitrag soll deshalb über das unterschiedliche naturwissenschaftliche Verständnis von Symmetrie strukturiert werden:

- 1) Gruppentheorie als mathematische Grundlage der Symmetrie
- 2) Symmetrien räumlicher Strukturen in Kristallographie, Festkörperphysik, Chemie und Biologie
- 3) Symmetrie und Erhaltungsgrößen in Physik und Kosmologie

Oft werden aus didaktischen Gründen keine komplexen mathematischen Formalismen bemüht, sondern nur verbal auf die mathematischen Bezüge hingewiesen. Mit der Mathematik soll an einfachen Beispielen begonnen werden, um entsprechende Grundlagen zu legen.



*Abb. 1: Einige anschauliche und weniger anschauliche Aspekte von Symmetrie in angewandter Mathematik und Natur<sup>7</sup>.*

Symmetrie kann über die Mathematik verallgemeinert werden, aber sie hat ihre spezielle Ausprägung in den einzelnen Disziplinen. Dies gilt besonders für die Terminologie: So muss man sich per se hüten, die Bezeichnungen aus der Mathematik mit den Notationen und Abkürzungen z.B. in Kristallographie und Chemie gleichzusetzen. Die mathematische Basis bleibt übertragbar und ist die theoretische Grundlage, aber in den einzelnen Fachdisziplinen sind teilweise andere Bezeichnungen entstanden. Insbesondere Physik und Mathematik haben sich durchaus gegenseitig befruchtet. Dies gilt weniger für die frühe Gruppentheorie, deren anwendungsorientierte Ergebnisse, die für Anwendungen z.B. in der Chemie oder Molekülphysik benötigt werden, bereits im 19. Jahrhundert entwickelt wurden. Am wenigsten lässt sich Symmetrie bei biologischen Beispielen durch die mathematische Gruppentheorie systematisieren und formalisieren. Dies darf aber kein Freibrief für sprachliche Unschärfe sein. Der ästhetische Reiz der „Symmetrie für das Auge“ kommt besonders in der Biologie zum Tragen. Aber auch für berühmte Physiker war die Ästhetik der Symmetrie Leitlinie<sup>8</sup>.

---

<sup>7</sup> Bildnachweise: [openclipart.org/detail/34045/kugel-orange](https://openclipart.org/detail/34045/kugel-orange), [de.wikipedia.org/wiki/Schnee#/media/File:Schnee1.jpg](https://de.wikipedia.org/wiki/Schnee#/media/File:Schnee1.jpg), [de.wikipedia.org/wiki/Large\\_Hadron\\_Collider](https://de.wikipedia.org/wiki/Large_Hadron_Collider), [de.wikipedia.org/wiki/Zauberwürfel](https://de.wikipedia.org/wiki/Zauberwürfel)

<sup>8</sup> Siehe z.B. Yakov A. Smorodinski, Heisenberg und Dirac: Die Bedeutung des Schönen in der Naturwissenschaft, Phys. Bl. 49 (1993) Nr. 5, S.436-438.

## Gruppentheorie als mathematische Grundlage der Symmetrie

An einem Beispiel sollen Grundprinzipien der Gruppentheorie aufgezeigt werden. Die folgende Abb. zeigt Drehungen und Spiegelungen eines Quadrates, die wieder deckungsgleich zur ursprünglichen Orientierung führen. Als *Symmetrieelemente* hat ein Quadrat vier Spiegelebenen und eine sogenannte vierzählige Drehachse  $C_4$  als Schnittlinie der vier Spiegelebenen<sup>9</sup>. Die theoretisch denkbare Spiegelebene in der „Papierebene“ wird in der Geometrie, im Gegensatz auch zu planaren räumlichen Strukturen, nicht genannt. Die Operationen, die wieder zur vollständigen Deckung führen, stellen die *Symmetrieeoperationen* dar. In diesem Fall sind es die möglichen Dreh- und Spiegelungen des Quadrates, wobei die Orientierung gleich bleibt und nur die Ecken vertauscht werden. Um diese „Transformationen“ zu verdeutlichen, wurde nur zur Illustration ein „F“ eingebettet; die Ecken des Ausgangsquadrates wurden von A bis D gegen den Uhrzeigersinn (mathematisch positiv) durchgezählt. Die indizierten d- bzw.  $\sigma$ -Symbole bezeichnen die zu erläuternden Symmetrieeoperationen. i wie Identität entspricht einer Drehung um 0 oder 360 Grad oder einfach der Tatsache, nichts an der ursprünglichen Lage des Quadrats verändert zu haben.  $d_1$  dreht um 90 Grad nach links,  $d_2$  um 180 Grad. Das entspricht zweimaliger Anwendung von  $d_1$ . Analog  $d_3$  mit dreifacher Anwendung von  $d_1$ . Man sieht unschwer, dass viermalige Anwendung wieder zu i führt ( $d_1^4 = i$ , 4 nennt man Ordnung von  $d_1$ , die Ordnung der sog. Gruppe ist 8, also Anzahl der Elemente). Die Spiegelungen an den vier Spiegelebenen werden mit  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  und  $\sigma_4$  bezeichnet. Das Zeichen  $\circ$  bezeichnet die Verknüpfung der Symmetrieeoperationen.

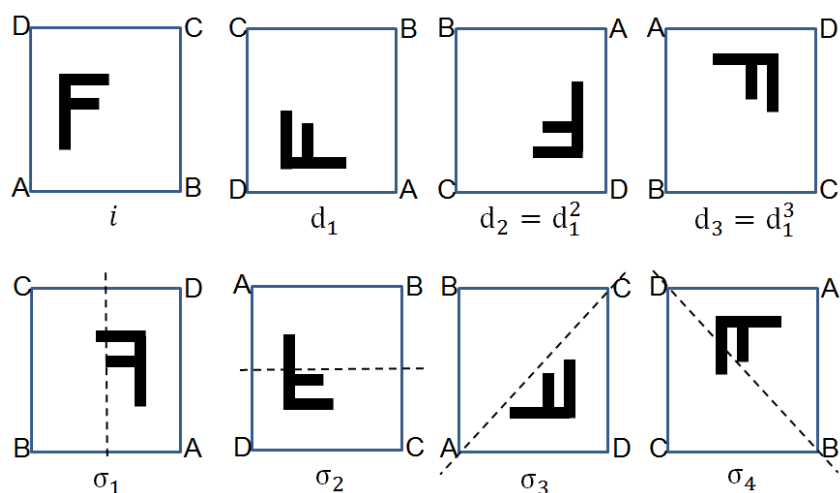


Abb. 2: Die sogenannte Diedergruppe  $D_n$  (Di-eder, hier regelmäßiges Viereck,  $n=4$ ) charakterisiert z.B. die Drehungen und Spiegelungen eines Quadrates.

<sup>9</sup> Siehe auch Abkürzungsverzeichnis und Glossar am Ende des Beitrags;  
Vorsicht: die Konventionen können je nach Fachgebiet unterschiedlich sein.

Sie hat  $4+2+2 = 8$  Elemente. Deshalb findet man auch die Bezeichnung  $D_8$ . Di-edergruppen haben die Form  $D_{2k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . In diesem Beitrag wird die Nomenklatur  $D_n$ , also hier  $D_4$ , verwendet<sup>10</sup>.

Man beachte, dass die  $d_i$  und  $\sigma_i$  Symmetrieoperationen, also kongruente Abbildungsvorschriften, sind. Man sollte im Zweifelsfall auf die Eckenvertauschungen schauen, die eine Symmetrieoperation definieren („Permutation“). So vertauscht  $\sigma_2$  die Ecke rechts oben mit rechts unten sowie links oben mit links unten. Nur auf die Ausgangslage angewendet ist es auch eine Spiegelung des eingebetteten „F“ an der waagrecht verlaufenden Symmetrieebene. Sonst ist es eine Rechenvorschrift bzw. Handlungsanweisung, wie die Verknüpfung eines beliebigen Elementes  $x$  mit  $\sigma_2$  (also  $x \circ \sigma_2$ ) zu erfolgen hat. Es wird sich zeigen, dass dabei die Reihenfolge wichtig sein kann. In Permutationsdarstellung lauten die Verknüpfungsanweisungen sehr umständlich, aber korrekt formuliert, wie folgt:

Bilde das vorliegende Quadrat in einer der acht Orientierungen gemäß der Eckenvertauschung ab, wie sie den Handlungsanweisungen bzgl. der ursprünglichen Grundstellung zur neuen, deckungsgleichen Konstellation entspricht.

$\{A, B, C, D\} \rightarrow \{A, B, C, D\}$  entspricht  $i$  (Identität) mit Drehung um  $0^\circ$   
 $\{A, B, C, D\} \rightarrow \{D, A, B, C\}$  entspricht  $d_1$  mit Drehung um  $90^\circ$  nach links  
 $\{A, B, C, D\} \rightarrow \{C, D, A, B\}$  entspricht  $d_2$  mit Drehung um  $180^\circ$  nach links  
 $\{A, B, C, D\} \rightarrow \{B, C, D, A\}$  entspricht  $d_3$  mit Drehung um  $270^\circ$  nach links  
 $\{A, B, C, D\} \rightarrow \{B, A, D, C\}$  entspricht  $\sigma_1$  (Spiegelebene senkrecht)  
 $\{A, B, C, D\} \rightarrow \{D, C, B, A\}$  entspricht  $\sigma_2$  (Spiegelebene waagrecht)  
 $\{A, B, C, D\} \rightarrow \{A, D, C, B\}$  entspricht  $\sigma_3$  (Ebene links unten nach rechts oben)  
 $\{A, B, C, D\} \rightarrow \{C, B, A, D\}$  entspricht  $\sigma_4$  (Ebene rechts unten nach links oben)

*Abb. 3: Permutationsdarstellung der Diedergruppe  $D_4$  (erster Buchstabe kennzeichnet die Ecke links unten; dann weiter gegen den Uhrzeigersinn d.h. mathematisch positiv).*

Beispiel:  $d_3 \circ \sigma_2$

Hier steht das Quadrat in der Stellung  $\{B, C, D, A\}$  und Anwendung von  $\sigma_2$  bedeutet Vertauschung von A und B bzw. von D und C. Es resultiert  $\{A, D, C, B\}$ , das der Symmetrieoperation  $\sigma_3$  entspricht.

Somit gilt  $d_3 \circ \sigma_2 = \sigma_3$ . Umgekehrt sieht man, dass  $\sigma_2 \circ d_3 = \sigma_4$  ist.

Man darf also nicht so ohne weiteres vertauschen.

---

<sup>10</sup> Die gewählte Alternative erfolgt aus didaktischen Gründen, um den Bezug zum regelmäßigen Viereck/Quadrat zu betonen, obwohl  $D_4$  mehr im geometrischen Kontext verwendet wird und  $D_{2 \cdot 4}$  mehr in der Gruppentheorie.

Der Anwendungsgegenstand ist im Prinzip beliebig und die möglichen acht Symmetrioperationen müssen lediglich dieselben formalen Kriterien erfüllen. Z.B. gelten die Überlegungen auch für ein magisches Quadrat mit neun unterschiedlichen Ziffern. Es hat bekanntlich die Summe 15 bei allen Zeilen, Spalten und Diagonalen. Entsprechende „Deckoperationen“ funktionieren auch bei anderen magischen Quadraten oder bei entsprechenden Kartenlegespelen. Die Menge an Elementen muss gleich sein (hier acht) und die Verknüpfung muss für diese Beispiele analog zu den vier Drehungen und  $2+2=4$  verschiedenen Spiegelungen (diagonal oder durch die Seitenmittelpunkte) sein. Ihre so gebildete Gruppe (aus acht Elementen mit entsprechend definierter Verknüpfung) lässt sich umgekehrt eindeutig (bijektiv) auf  $D_4$  abbilden. Man sagt: Sie ist zu  $D_4$  isomorph. Die Mathematik bietet somit, wie wir es für viele andere Bereiche kennen, für einen dermaßen gelagerten Fall eine Universalbeschreibung an, die relativ unabhängig eingesetzt werden kann. Mathematik ist bekanntlich unabhängig vom jeweiligen Anwendungsbereich. Dies gilt auch für die Beschreibung von Symmetrieeigenschaften durch die Gruppentheorie. Die nachfolgende Abb. zeigt alle Verknüpfungen der acht Elemente untereinander:

$\circ$	i	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_4$
i	i	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_4$
$d_1$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	i	$\sigma_3$	$\sigma_4$	$\sigma_2$	$\sigma_1$
$d_2$	$d_2$	$d_3$	i	$d_1$	$\sigma_2$	$\sigma_1$	$\sigma_4$	$\sigma_3$
$d_3$	$d_3$	i	$d_1$	$d_2$	$\sigma_4$	$\sigma_3$	$\sigma_1$	$\sigma_2$
$\sigma_1$	$\sigma_1$	$\sigma_4$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	i	$d_2$	$d_3$	$d_1$
$\sigma_2$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_1$	$\sigma_4$	$d_2$	i	$d_1$	$d_3$
$\sigma_3$	$\sigma_3$	$\sigma_1$	$\sigma_4$	$\sigma_2$	$d_1$	$d_3$	i	$d_2$
$\sigma_4$	$\sigma_4$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_1$	$d_3$	$d_1$	$d_2$	i

Abb. 4: Verknüpfungstafel der Diedergruppe  $D_4$ . Die Gruppe wird von 2 Elementen erzeugt (Drehung um  $90^\circ$  und Spiegelung mit anschl. Drehung um  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  bzw.  $270^\circ$  gegen den Uhrzeigersinn).

Man sieht ebenfalls, wie oben angedeutet, dass es auf die Reihenfolge der Operationen ankommen kann. So ergibt auch  $d_1 \circ \sigma_1 = \sigma_3$ , aber  $\sigma_1 \circ d_1 = \sigma_4$ . Es gilt hier nicht das Kommutativgesetz wie z.B. bei der Multiplikation von reellen Zahlen, bei denen für beliebige Zahlen  $a$  und  $b \in \mathbb{R}$  gilt:  $a \cdot b = b \cdot a$ .

Außerdem besitzt das Beispiel die nachfolgenden Eigenschaften.

- 1) Jede Verknüpfung führt wieder zu einem Gruppenelement (abgeschlossen).
- 2) Es gibt ein Element, das keine Veränderung bewirkt (neutrales Element, i).



- 3) Zu jedem Element  $a_x$  existiert ein inverses Element  $a_x^{-1}$ , so dass durch die Verknüpfung beider wieder das neutrale Element entsteht ( $a_x \circ a_x^{-1} = i$ ).
- 4) Es gilt das Assoziativgesetz, wonach die Kammersetzung unerheblich ist, also  $a_x \circ (a_y \circ a_z) = (a_x \circ a_y) \circ a_z$  mit  $a_x, a_y, a_z \in \{i, d_1, d_2, d_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_7\}$

Es zeigt sich, dass jede mathematische Gruppe mit einer Menge an Elementen und einer Verknüpfung zwischen den Elementen durch 1) – 4) charakterisiert ist. Die genannten vier Eigenschaften können zum Nachweis der Gruppeneigenschaft herangezogen werden.

Bei näherem Hinschauen erkennt man, dass diese vier Eigenschaften auch auf eine Untergruppe zutreffen, die aus den Elementen  $i, d_1, d_2$  und  $d_3$ , also den Drehungen, besteht. Sie können als Potenzen von  $d_1$  aufgefasst werden. Man nennt solche Gruppen „zyklisch“ (s.u.). Für diese Untergruppe gilt auch das Kommutativgesetz, denn dieser Tabellenteil ist spiegelsymmetrisch zur Hauptdiagonalen von links oben nach rechts unten. Solche Gruppen nennt man „abelsch“ nach dem norwegischen Mathematiker Niels Henrik Abel (1802 – 1829), einem Pionier auf diesem Gebiet. Auch die 180 Grad Drehung  $d_2$  bildet mit dem neutralen Element eine Untergruppe. Das neutrale Element alleine ist immer trivialerweise eine Untergruppe. Es ist kein Zufall, dass die Anzahl der Elemente 1, 2 und 4 und 8 selber den Teilern von 8 entspricht. Es gibt übrigens noch eine zweite nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 8, wobei sich beide nicht ineinander überführen lassen (nicht isomorph sind). Es ist die Gruppe der Quaternionen<sup>11</sup>. Auch drei vollkommen unabhängige abelsche Gruppen der Ordnung 8 sind bekannt. Bei nur acht Elementen in der Gruppe können also fünf unterschiedliche, nicht isomorphe Strukturen gefunden werden.

Es ist ein elementarer Satz der Gruppentheorie („Satz von Lagrange“), dass die Ordnung eines Elementes die Gruppenordnung teilt. Das sind die Teiler 8, 4, 2 und 1 (für das neutrale Element). Bei einer Ordnung 8, also eines Elementes, das die ganze Gruppe erzeugt, liegt eine zyklische Gruppe vor, also z.B. die Drehungen eines regelmäßigen Achtecks.

Diese Gruppe nennt man bei 8 Elementen  $\mathbb{Z}_8$ .

Ein weiteres Beispiel der drei abelschen Gruppen sei hier genannt: Die Gruppe hat ein Element  $a$  der Ordnung 4 und ein Element  $b$  der Ordnung 2, d.h. es gilt  $a^4=i$  und  $b^2=i$ . Die Gruppe hat somit die Elemente  $\{i, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$ .

---

<sup>11</sup> Quaternionen kann man salopp als Erweiterung der komplexen Zahlen sehen mit  $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = -1$ . Verknüpfungsregel ist  $i \cdot j = k$ , aber  $j \cdot i = -k$ . Die Gruppe besteht aus den Elementen  $1, -1, i, -i, j, -j, k, -k$  und ist ebenfalls nicht-abelsch. Hier soll nicht näher darauf eingegangen werden. Die Eigenschaften sind gut beschrieben unter <https://de.wikipedia.org/wiki/Quaternionengruppe>



So ist z.B.  $a^2 b \circ a^3 b = a^5 b^2 = a a^4 b^2 = a i i = a$ , denn  $a^4 = b^2 = i$  und  $a i = i a = a$ . Die Gruppe wird von  $b$  der Ordnung 2 und  $a$  der Ordnung 4 erzeugt und wird deshalb mit  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$  bezeichnet. Analog heißt die 3. abelsche Gruppe  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2^3$ .

Die Multiplikationstafel oder Gruppentafel von  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$  ist symmetrisch zur Diagonalen von links oben nach rechts unten, d.h. die Gruppe ist abelsch – es gilt das Kommutativgesetz.

$\circ$	$i$	$a$	$a^2$	$a^3$	$b$	$ab$	$a^2b$	$a^3b$
$i$	$i$	$a$	$a^2$	$a^3$	$b$	$ab$	$a^2b$	$a^3b$
$a$	$a$	$a^2$	$a^3$	$i$	$ab$	$a^2b$	$a^3b$	$b$
$a^2$	$a^2$	$a^3$	$i$	$a$	$a^2b$	$a^3b$	$b$	$ab$
$a^3$	$a^3$	$i$	$a$	$a^2$	$a^3b$	$b$	$ab$	$a^2b$
$b$	$b$	$ab$	$a^2b$	$a^3b$	$i$	$a$	$a^2$	$a^3$
$ab$	$ab$	$a^2b$	$a^3b$	$b$	$a$	$a^2$	$a^3$	$i$
$a^2b$	$a^2b$	$a^3b$	$b$	$ab$	$a^2$	$a^3$	$i$	$a$
$a^3b$	$a^3b$	$b$	$ab$	$a^2b$	$a^3$	$i$	$a$	$a^2$

Abb. 5: Multiplikationstafel oder Gruppentafel von  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ . Die Gruppe ist eine der nicht isomorphen 5 Gruppen der Ordnung 8.  $D_4$  und  $Q_8$  sind nicht-abelsch;  $\mathbb{Z}_8$ ,  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$  und  $\mathbb{Z}_2^3$  sind abelsch.

Ist dagegen die Zahl der Elemente eine Primzahl  $p$ , so gibt es nur die Gruppe der Drehungen in einem regelmäßigen Vieleck mit  $p$  Ecken und es lässt sich nur das neutrale Element als Untergruppe identifizieren („Zyklische Gruppen“). Die nicht weiter zerlegbaren Gruppen nennt man endliche einfache Gruppen. Sie haben eine ähnliche Rolle wie die Primzahlen, der Sachverhalt ist aber deutlich komplexer: Im Gegensatz zu der Primfaktorzerlegung lässt sich aber aus der Zerlegung in endliche einfache Gruppen die ursprüngliche endliche Gruppe nicht eindeutig rekonstruieren<sup>12</sup>.

Was sich hier bei diesem überschaubaren Beispiel noch als relativ einfach darstellt, ist Teil der mächtigsten Theorie der Mathematik. Die Gruppentheorie wurde ursprünglich entwickelt, um systematisch algebraische Gleichungen lösen zu können<sup>13</sup>. Erst später wurden über die Untersuchung von

12 Ein Beispiel für eine große, aber endliche Gruppe liefert der sogenannte Zauberwürfel Rubik's Cube. Die Anzahl aller Elemente in dieser Gruppe, also alle möglichen Drehungen, ist eine 20-stellige Zahl.

13 Hinweis: Insbesondere wurden dazu zunächst in der Linearen Algebra die Matrizenrechnung und bei quadratischen Matrizen der Begriff der Determinante

geometrischen Strukturen die Eigenschaften deutlich, die Symmetriebeziehungen betreffen. Das Beispiel  $D_4$  ist ein Vertreter endlicher Gruppen, an dem sich auch die Definition endlicher *einfacher* Gruppen erläutern ließ. Ihre Untersuchungen erstrecken sich auf geschätzte 10.000 - 15.000 Druckseiten<sup>14</sup>. Ca. 180 Jahre wurde an der Gruppentheorie gearbeitet; ca. 60 Jahre an endlichen einfachen Gruppen. Hunderte von Artikeln sind dazu entstanden. Sie gipfeln letztendlich in einem mathematischen Satz („Riesentheorem“, „enormous theorem“), der einfach zu formulieren, aber schwer zu beweisen war und noch schwerer zu überblicken ist<sup>15</sup>. Alle mathematischen Beschreibungen von Symmetrie in endlichen Mengen lassen sich danach in vier Klassen oder Großfamilien einordnen:

- 1) Ein Vertreter der **zyklischen Gruppen** sind z.B. die Drehungen beim Quadrat, deren Elemente sich alle aus  $d_1$  erzeugen lassen. Analog werden im Prinzip alle zyklischen Gruppen definiert, indem es in ihnen genau ein erzeugendes Element geben muss.
- 2) Die **alternierenden Gruppen** haben mit Permutationen zu tun, also unterschiedliche Anordnungen einer Folge von Elementen. Alle Permutationen bilden eine Gruppe, aber in der Regel keine einfache. Man kann Permutationen auf das Vertauschen von jeweils zwei Elementen zurückführen (Transpositionen). Konzentriert man sich nur auf eine gerade Anzahl von Transpositionen, so erhält man alternierende Gruppen<sup>16</sup>.
- 3) Die reichhaltigste Großfamilie bilden die **Gruppen vom Lie-Typ**. Es gehören z.B. feste Drehungen um den Nullpunkt im dreidimensionalen Raum mit nur endlich möglichen Koordinatenpositionen dazu. Das „Riesentheorem“ bezieht sich nur auf endliche (einfache) Gruppen. Lie-Gruppen müssen nicht nur eine endliche Anzahl an Elementen haben und sind erst recht nicht auf einen dreidimensionalen Raum beschränkt. Lie-Gruppen sind in der theoretischen Physik das bevorzugte

---

eingeführt, die ihnen einen skalaren Wert zuordnet. Mittels Determinanten wurden schon früh lineare Gleichungssysteme untersucht. Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, wenn die Determinante ungleich Null ist.

14 Für diese und folgende allgemeine Aussagen bzw. teils wörtliche Zitate siehe Spektrum der Wissenschaft, März 2016, S. 48 ff.

15 Vier emeritierte Professoren, Stephen D. Smith, Michael Aschbacher, Richard Lyons, Ronald Solomon, haben 2011 ein Buch veröffentlicht, das auf 350 Seiten in groben Zügen den Beweis skizziert. Sie gelten als die wenigen Menschen, die noch die Thematik ganz überblicken (nach Anm. 14).

16 Beispiel: Permutationen der Menge  $\{1, 2, 3\}$  sind  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{2, 3, 1\}$ ,  $\{3, 1, 2\}$ ,  $\{1, 3, 2\}$ ,  $\{2, 1, 3\}$ ,  $\{3, 2, 1\}$ . Die ersten drei Permutationen vertauschen jeweils zwei Zahlen, sind also geradzahlig. Die letzten drei vertauschen die Plätze aller drei Zahlen. Somit bilden  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{2, 3, 1\}$ ,  $\{3, 1, 2\}$  eine alternierende Gruppe.

Werkzeug, um Symmetrien in der Physik mathematisch zu beschreiben<sup>17</sup>. Die mathematische Struktur einer Lie-Gruppe hat somit erhebliche Bedeutung in der Physik. Sie wird insbesondere auch bei der Teilchenphysik diskutiert, bei der sie eine zentrale Bedeutung bei der Weiterentwicklung des Standardmodells der Elementarteilchen besitzen könnte.

- 4) Die vierte Großfamilie ist ein Sammelsurium von 26 schwer fassbaren Gruppen – die **sporadischen Gruppen**. Dazu gehört das sogenannte „Monster“ mit mehr als  $10^{53}$  Elementen<sup>18</sup>, die man als Kongruenzabbildungen in einem 196883-dimensionalen Raum auffassen kann. Es ist noch kein gesicherter Anwendungsfall dafür bekannt, aber es ranken sich mathematisch begründete Spekulationen um diese Gruppe, die Zusammenhänge mit dem Universum vermuten. Sie sind als Monstrous Moonshine bekannt<sup>19,20</sup>. Auf jeden Fall gibt es einen gesicherten unerwarteten Zusammenhang zwischen der Monstergruppe und bestimmten modularen Funktionen, die in Kernbereiche von Mathematik

---

17 Wenn die Gruppenelemente durch  $n$  reelle Koordinaten darstellbar sind, so handelt es sich, salopp definiert, um eine sogenannte Mannigfaltigkeit und eine kontinuierliche Gruppe. Die Anzahl der Gruppenelemente kann endlich, abzählbar unendlich oder überabzählbar unendlich sein. Die Koordinaten des Ergebnisses einer Verknüpfung lassen sich durch eine stetige Funktion  $f_1$  ausdrücken; entsprechend Inversenbildung durch eine weitere stetige Funktion  $f_2$ . Sind  $f_1$  und  $f_2$  unendlich oft differenzierbar („glatt“) und lassen sich in eine Potenzreihe entwickeln („analytisch“), so ist die Gruppe eine Lie-Gruppe.

18 Genau  $808\,017\,424\,794\,512\,875\,886\,459\,904\,961\,710\,757\,000\,754\,368\,000\,000\,000 = 2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$  einzelne Elemente, die man sich als Drehungen in einem 196 883 dimensionalen Raum vorstellen kann. Es treten nur Primzahlen bis 71 auf (supersinguläre Primzahlen). Es fiel bei den Raumdimensionen die Nähe zum 1. Koeffizienten der modularen  $j$ -Funktion auf:  $j(\tau) = q^{-1} + 744 + 196884 q + 21493760 q^2 + \dots$ ,  $q = \exp(2\pi i \tau)$ ,  $\text{Im}(\tau) > 0$ . Dies führte zum Beweis der Moonshine Vermutung durch Richard Ewen Borcherds. Er basiert auf Erkenntnissen aus der konformen Quantenfeldtheorie (String-Theorie).

19 Siehe dazu [https://en.wikipedia.org/wiki/Monstrous\\_moonshine](https://en.wikipedia.org/wiki/Monstrous_moonshine)

20 Im Kapitel „Symmetrie und Erhaltungsgrößen in Physik und Kosmologie“ wird in diesem Zusammenhang auf sog. Kac-Moody-Gruppen verwiesen. Siehe dazu vorab: [https://www.mpg.de/324293/forschungsSchwerpunkt1?c=166410&force\\_lang=de](https://www.mpg.de/324293/forschungsSchwerpunkt1?c=166410&force_lang=de) Eher mathematisch orientierte Resultate finden sich z.B. unter <https://www.degruyter.com/view/j/jgth.ahead-of-print/jgth-2016-0034/jgth-2016-0034.xml?format=INT> bzw. analog <https://arxiv.org/abs/1502.07294> mit einer Reihe von zitierten Ergebnissen aus der Stringtheorie.

Dreh- und Angelpunkt ist die Gruppe  $E(10)$ , die in der Nähe des Urknalls auftauchen sollte. Die mathematische Konstruktion von Zukunft und Vergangenheit auf  $E(10)$  ist kürzlich gelungen. Siehe Sätze 1.16 und 1.17 folgender Arbeit:

<https://arxiv.org/abs/1702.08426>. Es ist offen, inwieweit dies der physikalischen Raumzeit der Allgemeinen Relativitätstheorie entspricht (mehr bei Physik/Kosmologie).

und Physik reichen. Modulare Funktionen messen Rechts-Links-Asymmetrie von Gruppen.

Obwohl in den Naturwissenschaften nur endliche Objekte betrachtet werden, sind auch unendliche Gruppen dann von Bedeutung, wenn große Zahlen oder makroskopische Vorgänge eine Rolle spielen. Das einfachste Beispiel sind die ganzen Zahlen mit der Null als neutralem Element und der Addition als Verknüpfung. Sie ist abgeschlossen, denn es entstehen immer wieder ganze Zahlen. Ein inverses Element existiert für jede Zahl  $a$  in seiner negativen Zahl  $(-a)$ , denn  $a+(-a)=0$ .  $a$  kann dabei selbst negativ sein. Ist  $a=-b$ , so ist  $-b+(-(-b))=-b+b=0$ . Es gilt außerdem das Assoziativgesetz und auch darüber hinaus das Kommutativgesetz. Analog bilden die rationalen Zahlen / Brüche eine Gruppe, die reellen Zahlen und auch die komplexen Zahlen. Eine wichtige Erweiterung des Gruppenbegriffes ist der mathematische Körper. Dabei wird auf der endlichen oder unendlichen Menge eine zweite Verknüpfung definiert. Sie entspricht z.B. der Multiplikation (mit Division als ihrer Umkehrung). Das neutrale Element ist die 1. Nur das neutrale Element der 1. Verknüpfung, z.B. der Null bei der Addition, ist für die zweite Verknüpfung ausgeschlossen (denn zur Null gibt es kein Inverses mit  $a \cdot a^{-1}=1$  bzgl. der Multiplikation; man „darf“ nicht durch Null dividieren). In Körpern gelten für beide Verknüpfungen das Kommutativgesetz und auch bei beiden Verknüpfungen erweiterte Distributivgesetze mit gemischten Verknüpfungen. Zweifellos sind die reellen Zahlen (mit der Addition und/oder Multiplikation) die wichtigste Gruppe für eine Vielzahl an wissenschaftlichen Disziplinen. Auch die „allgemeine lineare Gruppe“ (über einem Vektorraum) mit der Matrizenmultiplikation als Verknüpfung hat viele Anwendungsfälle. Es ist viel einfacher, mit Matrizen zu rechnen statt die unhandlichen Gruppenelemente zu behandeln. Einen solchen Vektorraum bezeichnet man unter bestimmten Voraussetzungen als Lie-Algebra, d.h. man definiert eine zweite Verknüpfung analog zur Multiplikation zusätzlich zur Matrizen-Addition. Das ist das zentrale Werkzeug vieler Symmetrie-Betrachtungen in der Physik.

## Symmetrien räumlicher Strukturen

Kristalle haben schon früh die Menschen fasziniert. Es scheint besonders die Schönheit der Strukturen für den Reiz verantwortlich zu sein. Diese machen vor allem Symmetriekriterien aus.



Abb. 6: Einige Kristalle als Repräsentanten der sieben Kristallsysteme<sup>21</sup>

Versuche, eine Strukturierung zu erzielen, gehen bis auf Theophrastos von Eresos (371-287 v. Chr.) und auf Plinius dem Älteren (26-79 n. Chr.) zurück<sup>22</sup>. Weitere Versuche zur Systematisierung folgten und waren häufig mit geometrischen Überlegungen verknüpft. Der formale Symmetriebegriff wurde dabei von dem katholischen Pfarrer René-Just Haüy (1743-1822) mit seinem Symmetriegesetz eingeführt. Doch erst die Entwicklung der Gruppentheorie brachte das nötige Instrumentarium, um eine vollständige mathematische Beschreibung zu erzielen.

Die Gruppentheorie muss jedoch bei weitem nicht voll ausgeschöpft werden. So sind neben Inversionszentrum und Spiegelebene nur Drehachsen bis zur Sechszähligkeit bekannt (2, 3, 4, 6)<sup>23</sup>. Translationssymmetrie als Begriff wird unterschiedlich verwendet: In der Mathematik ist der Graph der Sinus-Funktion translationssymmetrisch (bzgl. x-Achse); in der Physik versteht man darunter eher die Invarianz gegenüber Koordinatentransformationen des Raumes. In der Kristallographie sind periodische Verschiebungen im Kristallgitter ohne

---

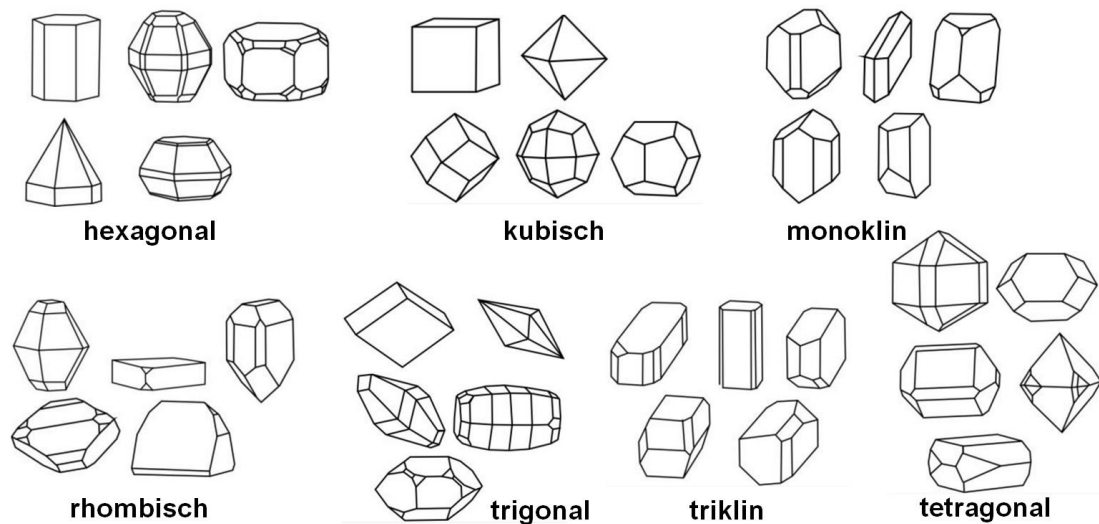
21 Von links nach rechts (abgerufen 06.02.2017):

Kristallsystem	Name	Formel	Bildnachweis
Triklin	Albit	$\text{Na}[\text{AlSi}_3\text{O}_8]$	<a href="http://de.wikipedia.org/wiki/Albit">de.wikipedia.org/wiki/Albit</a> (Natronfeldspat)
Monoklin	Gips	$\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$	<a href="http://de.wikipedia.org">de.wikipedia.org</a>
Orthorhombisch	Schwefel	S	<a href="http://de.wikipedia.org/wiki/Schwefel#/media/File:Sulfur-t07-67a.jpg">de.wikipedia.org/wiki/Schwefel#/media/File:Sulfur-t07-67a.jpg</a>
Tetragonal	Zirkon	$\text{Zr}[\text{SiO}_4]$	<a href="http://de.wikipedia.org/wiki/Zirkon">de.wikipedia.org/wiki/Zirkon</a>
Trigonal	Quarz	$\text{SiO}_2$	<a href="http://de.wikipedia.org/wiki/Quarz">de.wikipedia.org/wiki/Quarz</a>
Hexagonal	Beryll	$\text{Al}_2\text{Be}_3[\text{Si}_6\text{O}_{18}]$	<a href="http://de.wikipedia.org/wiki/Beryll">de.wikipedia.org/wiki/Beryll</a>
Kubisch	Halit	NaCl, Steinsalz	<a href="http://de.wikipedia.org/wiki/Halit">de.wikipedia.org/wiki/Halit</a>

22 [de.wikipedia.org/wiki/Kristallographie](http://de.wikipedia.org/wiki/Kristallographie), 06.12.2016

23 Fünfzähligkeit muss in der Kristallographie (im Gegensatz zur Molekülphysik) fehlen, weil sie keine periodische Raumstruktur zulässt. Allerdings findet man bei Quasikristallen entsprechende Muster. Die dafür zugrunde liegende mathematische Theorie war übrigens bei ihrer Entdeckung schon durch Roger Penrose über unendliche Parkettierungen der Ebene entwickelt worden.

Konsequenzen für die sog. Elementarzelle translationssymmetrisch<sup>24</sup>. Man unterscheidet in Translation der drei Basisvektoren, zusätzliche Zentrierungen, Gleitspiegelebenen und Schraubenachsen. Alle möglichen gruppentheoretischen Kombinationen dieser Symmetrieelemente ergeben dann die möglichen Raumgruppen in der Kristallographie. Man erhält 230 Raumgruppen, die die mikroskopische Struktur bestimmen und die sich je nach Betrachtungsweise noch weiter strukturieren lassen.



Kristallsysteme	Restriktionen bei Kantenlängen	Restriktionen in den Winkeln
triklin	keine	keine
monoklin	keine	$\alpha = \gamma = 90^\circ$
orthorhombisch	keine	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
tetragonal	$a = b$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
trigonal	$a = b$	$\alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$
hexagonal	$a = b$	$\alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$
kubisch	$a = b = c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$

Abb. 7: Die 32 Kristallklassen<sup>25</sup> lassen sich in sieben Kristallsysteme unterteilen. Dazu werden die Längenrestriktionen der Basisvektoren zueinander angegeben<sup>26</sup>. Für die Winkel gelten ebenfalls entsprechende

24 Natürlich ist dies nicht unendlich oft möglich.

25 Übersichtliche Darstellungen siehe [https://de.wikipedia.org/wiki/Punktgruppe bzw. www.spektrum.de/lexikon/geowissenschaften/kristallklasse/8902](https://de.wikipedia.org/wiki/Punktgruppe_bzw._www.spektrum.de/lexikon/geowissenschaften/kristallklasse/8902), (26.01.2017).

26 Nur die Kristalle dieser Kristallklassen haben die volle Flächenanzahl genau dann, wenn die Punktgruppe eines Kristalls mit der Punktgruppe seines Kristallgitters über-

*Restriktionen<sup>27</sup>. Mehr Restriktion bedeutet zwar mehr Regelmäßigkeit, aber weniger Symmetrie im Sinne von weniger Freiheitsgraden. (Grafiken der Kristallformen mit freundlicher Genehmigung von Mineralien Bremen, Herr Alfred Schäfer.)*

Die Betrachtung kann dabei die makroskopischen Symmetrieeigenschaften in den Vordergrund stellen (Kristallklassen) oder man betrachtet es aus Sicht der Kristallstrukturanalyse als Symmetrie des Röntgenbeugungsbildes (11 Laue-Gruppen) oder der Symmetrie des Translationsgitters (14 Bravaisgitter)<sup>28</sup>. Hier sind nicht nur die Ecken mit Atomen besetzt, sondern auch andere Positionen in der geometrischen Form (Mitte, Flächen, Raum etc.). Allerdings ist selbst eine Systematisierung verschiedener Kristalle, die zu einer Raumgruppe gehören, ggfs. noch schwierig. Man muss für den allgemeinen Fall eine virtuelle Ebene festlegen (vektoriell aufspannen) und die Struktur mittels drei Indices für die drei Raumdimensionen in Bezug auf diese Ebene beschreiben („Millersche Indices“). Dies ist meist bei monoklinen oder triklinen Kristallen der Fall. So versucht man die Elementarzelle zu identifizieren. Computerprogramme haben in den letzten Jahrzehnten die Arbeit enorm erleichtert. In zunehmend vielen Fällen sind die Kristallstrukturbestimmungen / Röntgenstrukturanalysen zum Service einer zentralen Abteilung der Universität oder des Fachbereiches geworden<sup>29</sup>.

Weitere Drehachsen oder andere Symmetrieelemente führen dazu, dass einzelne Indices zusammen fallen können, also Restriktionen bei den Gitterkonstanten entstehen. Es bleiben dabei aber 32 unterschiedliche Kristallklassen, die die möglichen Punktgruppen repräsentieren (siehe dazu auch Chemie/Molekülphysik) in sieben grundsätzlichen Kristallsystemen, die man durch gruppentheoretische oder trigonometrische Rechnungen nicht weiter vereinfachen kann. Meist verwendet man für die Kristallklassen die internationale Symbolik von Hermann-Mauguin. Molekülsymmetrie wird nach einer von Schoenflies vorgeschlagenen Systematik bezeichnet.

Die sieben Kristallsysteme vernachlässigen dabei den Inhalt und konzentrieren sich auf die grundsätzliche Symmetrie der Elementarzelle, d.h. betrachten lediglich die möglichen Restriktionen bei den Gitterkonstanten, wie

---

einstimmt; sie sind dann holoedrisch und haben eine maximale Symmetrie (Näheres siehe Kapitel Chemie).

27 Bildnachweis Kristallsysteme oben: alfs-mineralien.de.tl. Die 35 abgebildeten Kristallformen oben gehören jeweils zu den 7 Kristallsystemen, entsprechen aber nicht den 32 Kristallklassen.

28 Unter Verwendung von Materialien der Universität Marburg zu Röntgenbeugungsmethoden.

29 Beispiele Zentrale Abteilung für Kristallstrukturanalyse der Philipps-Universität Marburg, <https://www.uni-marburg.de/fb15/xray> oder <http://www.uni-regensburg.de/chemie-pharmazie/roentgenstrukturanalyse/>



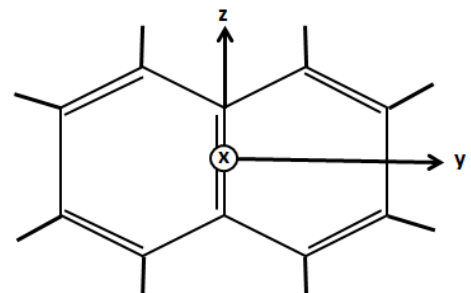
den Kantenlängen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und den Winkeln  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Die Kristallstrukturanalyse ist in den letzten Jahrzehnten eine sehr wichtige physikalische Untersuchungsmethode geworden. Es ist oft die einzige Methode, um die Struktur eines Festkörpers exakt zu beschreiben und die Bindungsverhältnisse bzgl. Atomabstände und Winkel genau angeben zu können. Dies gilt für fast alle Bereiche der Chemie und Mineralogie. Die theoretische Grundlage war dabei die Gruppentheorie und die experimentelle Basis der Nachweis der Röntgenbeugung an Kristallen durch Max von Laue.

Klarstellung zur Terminologie:

Die Schoenflies-Bezeichnungen orientieren sich nur grob an der Terminologie endlicher Gruppen. Die Mathematik ist deutlich mächtiger als die in der Natur vertretenen Symmetriegruppen und verwendet deshalb weitergehende Bezeichnungen. Man sollte also keinesfalls einen 1:1-Zusammenhang suchen. Die Diedergruppe  $D_4$  mit Drehungen und Spiegelungen eines Quadrats aus dem Kapitel Mathematik ist in der planaren Papierebene zu veranschaulichen. In der Chemie muss andererseits auch die Symmetrie eines Moleküls wie das planare  $\text{XeF}_4$  oder das  $\text{AgF}_4^-$ -Anion dreidimensional interpretiert werden, d.h. es kommen planare Symmetrieelemente hinzu (Spiegelebene, Drehachsen senkrecht zur vierzähligen Achse), die für ein Quadrat keine Rolle spielen. Dies entspricht der Punktgruppe  $D_{4h}$

nach Schoenflies. Andererseits werden die Symmetrieeigenschaften insofern vereinfacht dargestellt, dass eine irreduzible Darstellung gewählt wird („Charaktertafel“, siehe unten). Die zweite nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 8 (8 Elemente), die Quaternionengruppe  $Q_8$ , ergibt aber diese gleiche formale Symmetriecharakterisierung, also die gleiche Charaktertafel.  $D_4$  und  $Q_8$  lassen sich jedoch nicht ineinander überführen – es gibt keine bijektive Abbildung zwischen ihnen. Sie sind also nicht isomorph. Der gebräuchliche Name  $Q_8$  taucht in der Schoenflies-Terminologie gar nicht auf. Die Sicht der Mathematik / Gruppentheorie ist somit deutlich umfassender. Es gibt viele Gruppen, die in der Natur nicht vorkommen und man kann mit Symmetrieeoperationen in beliebigen Dimensionen rechnen.

Hier einige Beispiele, die sich zunächst im folgenden Abschnitt auf Kernresonanz-Spektroskopie (NMR) und Rückschlüsse auf die



*Abb. 8: Das Naphthalin-Molekül ist planar. Man wählt gemäß Mulliken-Vorschlag die x-Achse sinnvollerweise senkrecht zur Ebene sowie die y- und z-Achse jeweils senkrecht dazu. Es folgt der Punktgruppe  $D_{2h}$ , hat drei erzeugende Elemente und acht Symmetriespezies. Die Gruppenordnung ist acht.*

Molekülsymmetrie, Interpretationen der Farbtemperatur, optische Aktivität und auf die Molekülorbitalmethode wie LCAO (linear combination of atomic orbitals), beziehen. Man kann den Abschnitt „Makroskopische Stoffeigenschaften und Symmetrie“ nennen.

Anschließend soll in einem weiteren Abschnitt an zwei Beispielgruppen auf Symmetrieaspekte eingegangen werden, die vor allem für die Schwingungsspektroskopie sehr wichtig sind. Man kann diesen Abschnitt „Molekülbewegungen und Symmetrie“ nennen.

Makroskopische Stoffeigenschaften und Symmetrie:

Das NMR-Spektrum von Benzol lässt sich bekanntlich nicht nur mit einer der Kekulé-Formeln interpretieren, nach der alternierend Einfach- und Doppelbindungen auftreten (gemäß Valenzstrukturtheorie, VB). Analoges gilt für alle Aromaten z.B.

das abgebildete Naphthalin und viele andere Moleküle, bei denen die Betrachtung von Valenzelektronen ungenügende Ergebnisse bringt. Man findet deshalb heute bei Aromaten oft die Mulliken-Darstellung (mit „Kreis im Ring“) als Zeichen, dass hier die Molekülsymmetrie nach der Molekülorbitaltheorie zu interpretieren ist<sup>30</sup>. Vorsicht: Der Kreis entspricht 6  $\pi$ -Elektronen.

Fuchsin, dessen Farbe heute gerne Magenta genannt wird, ist symmetrischer, als die Abb. 9 suggeriert<sup>31</sup>, weil die positive Ladung über das ganze Molekül hinweg delokalisiert wird („Mesomerie-Stabilisierung“) und dadurch insbesondere die Protonen an den Stickstoffatomen spiegelsymmetrisch sind. Damit kann die intensive Farbe erklärt werden. Protonen sind dann chemisch

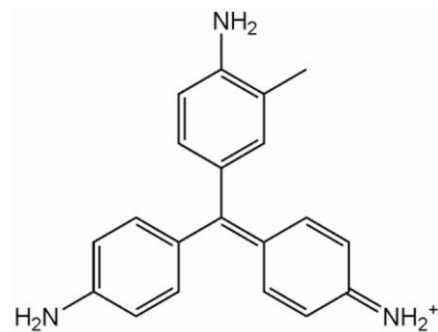


Abb. 9: Fuchsin-Struktur, die nicht die symmetrischen Eigenschaften widerspiegelt.

30 Symmetriebetrachtungen sind vor allem bei quantenchemischen Rechnungen von großem Nutzen beim LCAO-Ansatz. Bindungsenergien werden durch Überlappungsintegrale quantenchemisch berechnet. Wenn die beiden Wellengleichungen im Integral orthogonal zueinander sind oder sie zu unterschiedlichen irreduziblen Darstellungen gehören, so wird das resultierende Integral durch diese Symmetrie Null und vereinfacht somit die Gleichung. Auf diesen Bereich wird wegen der erforderlichen Mathematik, trotz seiner Bedeutung für die theoretische Chemie und Molekülphysik, nicht eingegangen.

31 Durch die  $\text{CH}_3$ -Gruppe kann aber keine reine dreizählige Drehachse entstehen. Die Molekülsymmetrie ist nur in grober Näherung  $\text{C}_{3v}$ , s.u. Das IR-Spektrum weist mehr als 3 stark ausgeprägte Absorptionslinien auf (25.01.2017, vgl. a.  $\text{NH}_3$ -Beispiel, siehe <http://webbook.nist.gov/cgi/cbook.cgi?ID=C7664417&Type=IR-SPEC&Index=1#IR-SPEC>

äquivalent, wenn sie spiegelsymmetrisch sind. Im NMR-Spektrum werden sie durch die gleiche Bande repräsentiert. Die Gruppentheorie ist für fast alle Spektroskopie-Methoden relevant<sup>32</sup>.

Eine andere wichtige Gruppe von Farbstoffen sind die Azofarben. Es sind seit Ende des 19. Jahrhunderts synthetisch hergestellte Farbstoffe, von denen man mittlerweile über 2.000 kennt<sup>33</sup>. Ihre

oft intensive Farbe erhalten sie von einer (oder mehreren) Stickstoff-Stickstoff Doppelbindungen als Brücke zwischen zwei Molekülteilen (oft Aromaten). Diese Brücke ist das zentrale Symmetrieelement und die Bindungsverhältnisse an dieser Stelle bestimmen oft maßgeblich die Farbe. Man kann über eine eindimensionale, zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung<sup>34</sup> aus Bindungsabständen die Farbe berechnen oder umgekehrt aus der Farbtemperatur / Wellenlänge bzw. Frequenz der Azofarbe auf die Bindungsverhältnisse schließen. Die Elektronen bewegen sich auf der „Azobrücke“ entlang einer (symmetrischen) stehenden Welle. Wird die Schwingungsebene von transversal polarisiertem Licht beim Durchgang durch einen Stoff gedreht, so nennt man den Stoff „optisch aktiv“. Wenn ein Molekül mit seinem Spiegelbild zur Deckung gebracht werden kann, so kann es nicht optisch aktiv sein und umgekehrt. Beispiele sind die beiden Isomere von  $\text{CHFClBr}$ , die optisch aktiv sind, weil keine Spiegelsymmetrieebene existiert. Dagegen ist  $\text{CH}_2\text{ClBr}$  optisch nicht aktiv (s.a. Biologie, Enantiomere).

Einen Schritt weiter geht man bei Überlegungen zum Dipolmoment. So ist das Wassermolekül ein Dipol, weil die elektrische Ladung verstärkt am Sauerstoff zu finden ist. Ähnliches gilt für „einseitig“ halogenierte Verbindungen wie Methylenchlorid (Dichlormethan,  $\text{CH}_2\text{Cl}_2$ ). Eine Verbindung wie  $\text{C}_6\text{H}_2\text{F}_2\text{Cl}_2$ , die

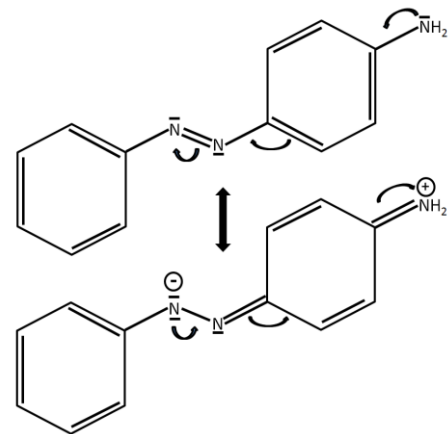


Abb. 10:  $\pi$ -Elektronenverteilung und Polarisation im **p-Aminoazobenzol**.

32 Einige Spektroskopie-Methoden und ihr Anwendungsbereich: IR steht für Infrarot-Spektroskopie. Sie misst Änderungen des Schwingungszustandes zweier Atome im Molekül. NMR misst die Änderung des Kernspinzustandes, ESR, Elektronenspinresonanz, misst Änderung des Elektronenspinzustandes oder Hyperfeinzustandes. Bei der Raman-Spektroskopie geht es um inelastische Streuung von Licht an molekularen, kristallinen oder amorphen Substanzen.

33 Der erste Azofarbstoff war 1883 Kongorot, der auch als Säure-Base – Indikator wirken kann (Umschlag von Blauviolett zu Rotorange im leicht Basischen). Es wird heute noch zu unterschiedlichen Zwecken kommerziell vertrieben und verwendet.

34 Die Schrödinger-Gleichung beschreibt die möglichen Superpositionen, also Überlagerung von Zuständen eines quantenmechanischen Systems und damit seine Dynamik. Erst durch die Messung entscheidet sich das System für einen Zustand.

symmetrisch als 1,4-Difluor-2,5-dichlor-benzol aufgebaut ist, kann aus Symmetriegründen kein Dipol sein. Das Molekül ist lediglich punktsymmetrisch mit einem Inversionszentrum<sup>35</sup>.

#### Molekülbewegungen und Symmetrie:

Über die Kristallstruktur und andere makroskopische physikalische Eigenschaften hinaus sind Symmetriebetrachtungen auch bei einzelnen Molekülen sinnvoll, insbesondere wenn Bewegungen mit Einfluss auf die Molekülsymmetrie damit zumindest qualitativ erklärt werden können. Das Standardwerk von J. Michael Hollas, „Symmetry in Molecules“, erschien 1972 in Englisch. 1975 hat es Ralf Steudel ins Deutsche übersetzt<sup>36</sup>. Hollas nutzt ebenfalls intensiv die Gruppentheorie. Lässt man Schraubenbewegungen und Gleitspiegelungen außer Acht, so sind in der Kristallographie lediglich 32 Punktgruppen (Kristallklassen) relevant. In der Molekülphysik sind die Verhältnisse anders. Die Ursache liegt darin, dass für die Symmetrieeigenschaften von Molekülen nicht nur die Gleichgewichts-anordnung der Atomkerne berücksichtigt werden muss, sondern auch die Bindungs- und Ladungsverhältnisse der Elektronen, Rotationen, Schwingungen, Kernspin, Elektronenspin und ggfs. translatorische Bewegungen des ganzen Moleküls etc. mit verantwortlich sind. Grundsätzlich gilt, dass ein Molekül genau dann symmetrisch

ist, wenn es im Raum mindestens zwei nichtunterscheidbare Orientierungen gibt. Die Gruppentheorie zeigt qualitativ an, welche Molekülzustände gleiche Energie haben; quantitative Aussagen über die relativen Energielagen können rechnerisch („Störungsrechnung“) ermittelt werden. Der Begriff Charaktertafel, Symmetriespezies und die Querbeziehungen zwischen Molekülphysik, Chemie und Mathematik sollen an dieser Stelle über zwei Beispiele verdeutlicht werden. In der Chemie und der Kristallographie verwendet man in der Regel keine Gruppentafeln. Diese haben kaum eine übersichtliche

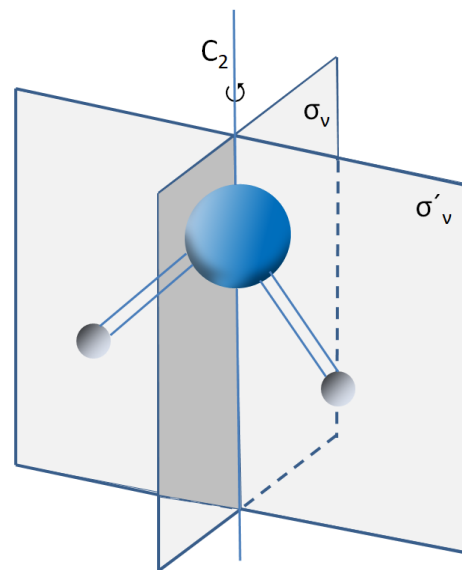


Abb. 11:  
Symmetrieeigenschaften des  
 $H_2O$ -Moleküls in der  
Punktgruppe  $C_{2v}$ .

35 S. Hollas, J. Michael, Die Symmetrie von Molekülen, S. 116 ff

36 S. Hollas, J. Michael, Die Symmetrie von Molekülen, Walter de Gruyter, Berlin New York 1975.

Aussagekraft, wenn es um die symmetrischen Eigenschaften geht. Stattdessen benutzt man irreduzible Darstellungen der Punktgruppe. Irreduzibel bedeutet, dass die Darstellung nicht weiter zerlegt werden kann und praktisch „auf einen Blick“ die wichtigsten Symmetrieeigenschaften zeigt. Die so gebildete Charaktertafel ist eine  $n \times n$  - Matrix, wenn  $n$  die Anzahl an Symmetrieelementen ist (Identität, Drehachsen, Spiegelebenen etc.). Diese  $n$  anschaulichen Eigenschaften stehen waagrecht in der Matrix. Senkrecht stehen die sogenannten  $n$  Symmetriespezies. Die Charaktertafel stellt sozusagen eine Übersicht über die Charaktere aller Symmetriespezies dar. Aus der Charaktertafel kann man die mathematische Gruppe nicht unbedingt rekonstruieren. So hat die Diedergruppe  $D_4$  und die Quaternionengruppe, wie bereits erwähnt, dieselbe Charaktertafel, obwohl beide nicht zueinander isomorph sind (es keine bijektive Abbildung zwischen beiden gibt). Die Gruppentafel ist für Kristallstrukturanalyse oder die Interpretation von Spektren nur indirekt relevant, wohl aber für die Mathematik, weil sie die Gruppe am genauesten beschreibt. Die dazu nötige Gruppentheorie und weitere Mathematik wurde zwar bzgl. des in der Chemie bzw. Molekülphysik benötigten mathematischen Instrumentariums weitgehend im 19. Jahrhundert entwickelt, auf Atome und Moleküle angewendet wurde sie aber erst in den 20er und 30er Jahren des 20. Jahrhunderts. Hollas versucht gemäß der Denkweise in Chemie bzw. Physikochemie, den Weg über mehr anschauliche Wege mit Beispielen aus der Chemie und beginnt bewusst nicht mit der mathematischen Theorie abstrakter Gruppen. An diesen Bezügen kommt man jedoch z.B. dann nicht vorbei, wenn übertragbare Anwendungen der Molekülsymmetrie ins Spiel kommen. So besitzen  $H_2O$  und  $CH_2F_2$  die gleichen Symmetrieelemente. Sie sind (natürlich) unveränderlich gegenüber einer Drehung von  $2\pi$  (genannt  $I$  oder  $i$  wie Identität als neutrales Element), besitzen eine zweizählige Drehachse ( $C_2$ ) sowie zwei Spiegelebenen; nämlich eine in der Molekülebene und eine senkrecht dazu ( $\sigma_v$  und  $\sigma'_v$ ). Hier benötigt man Punktgruppen; ein Begriff äquivalent zur Symmetriegruppe. Beim Wassermolekül heißt sie  $C_{2v}$  nach Schoenflies. Sie entspricht  $mm2$  (oder  $2mm$ ) und heißt als Kristallklasse orthorhombisch-pyramidal.  $C_{2v}$  soll unten nochmals als Beispielgruppe zur näheren Charakterisierung von Symmetrieeigenschaften angesprochen werden. Sie ist übrigens abelsch, d.h. es gilt in dieser Gruppe das Kommutativgesetz. Egal, wie viele Symmetrieeoperationen man an einem Molekül macht, wird es immer einen im Raum unveränderten Punkt geben, daher der Name „Punktgruppe“. Ein solcher ist z.B. der Mittelpunkt eines Benzol-Moleküls.

Man unterscheidet zwischen nicht-entarteten und entarteten Punktgruppen. Wenn völlig gleichartige, aber unabhängige, bei Frequenz und Energie gleiche Schwingungen entstehen können, spricht man von entarteten

Schwingungen. Das ist oft bei hoher Symmetrie der Fall. Von beiden Vertretern soll ein Beispiel diskutiert werden. Dabei wird die bereits erwähnte Punktgruppe  $C_{2v}$ , in der etwa das Molekül  $H_2O$  beschrieben werden kann und die Punktgruppe  $C_{3v}$  mit dem Beispiel Ammoniak,  $NH_3$ , gewählt. Die Charaktertafel zeigt durch Beibehaltung oder Änderung des Vorzeichens an, welche Symmetrieeigenschaften, z.B. durch Deformations- oder Valenzschwingungen, erhalten bleiben oder sich ändern. Es gibt vier verschiedene Möglichkeiten, wie die beiden Spiegelungen an den beiden Spiegelebenen die Symmetrie beeinflussen können. Deshalb gibt es auch vier verschiedene Varianten, +1 und -1 zu „verteilen“, d.h. es gibt vier verschiedene „Symmetrietypen“ („Symmetriespezies oder Rassen“) bei der Punktgruppe  $C_{2v}$ , die mit  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  und  $B_2$  bezeichnet werden. A steht für Bewegungen, bei denen die Symmetrie zur  $C_2$ -Achse erhalten bleibt; bei B entsteht Asymmetrie. Bei vieratomigen planaren Molekülen wie  $H_2CO$  oder  $ClNO_2$ , die zu  $C_{2v}$  gehören, benötigt man alle vier Symmetriespezies; bei einfachen Beispielen wie  $H_2O$  oder  $SO_2$  vereinfachen sich die entsprechenden Symmetriebetrachtungen etwas, weil es nur eine asymmetrische Symmetriespezies geben kann. Das wird bei der anschaulichen Herleitung außen vor gelassen. Beim  $NH_3$  ist eine zweifach entartete Schwingung zu beobachten. Deshalb wird in der Charaktertafel eine „2“ auftauchen (Punktgruppe  $C_{3v}$ ).

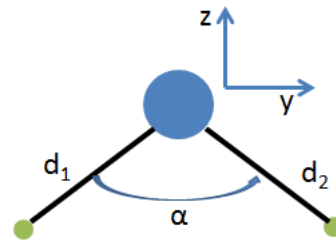


Abb. 12: Schematische Darstellung des  $H_2O$ -Moleküls (Deformation von  $\alpha$  oder Valenzschwingung entlang  $d_1$  bzw.  $d_2$ ).

	I	$C_2$	$\sigma_v(xz)$	$\sigma'_v(yz)$
Translation    zu z, $T_z$	+1	+1	+1	+1
Translation    zu x, $T_x$	+1	-1	+1	-1
Translation    zu y, $T_y$	+1	-1	-1	+1
Rotation um z, $R_z$	+1	+1	-1	-1
Rotation um x, $R_x$	+1	-1	-1	+1
Rotation um y, $R_y$	+1	-1	+1	-1

Abb. 13: Anschauliche Herleitung der  $C_{2v}$  Charaktertafel.

Man kann die resultierende Charaktertafel auch anschaulich verdeutlichen. Dazu betrachtet man die Änderungen an der Symmetrie bei allen möglichen Bewegungen im Raum. Das sind bei dieser einfachen Struktur drei



Translationen und drei Rotationen in den jeweiligen Raumrichtungen. Gleichbleibende Symmetrie wird mit +1 und Änderungen mit -1 bezeichnet. Verschieben parallel zur z-Achse bewirkt keine Veränderung; Rotation um z wirkt sich auf beide Spiegelungen aus, usw. Man sieht, dass Translation parallel zu x die Symmetrie wie Rotation um die y-Achse beeinflusst; Translation parallel zu y verändert die Symmetrie wie Rotation um die x-Achse, also  $T_x \triangleq R_y$  und  $T_y \triangleq R_x$ . Somit ergibt sich eine Charaktertafel, wie sie in Abb. 14 für die Punktgruppe  $C_{2v}$  dargestellt ist.

$C_{2v}$	I	$C_2$	$\sigma_v(xz)$	$\sigma'_v(yz)$	
$A_1$	1	1	1	1	$T_z$
$A_2$	1	1	-1	-1	$R_z$
$B_1$	1	-1	1	-1	$T_x, R_y$
$B_2$	1	-1	-1	1	$T_y, R_x$

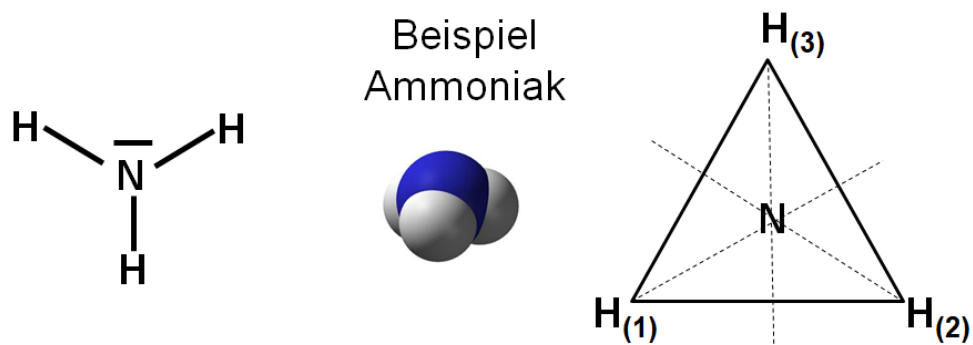
Abb. 14: Charaktertafel der Punktgruppe  $C_{2v}$ .

Aus Sicht der Mathematik erzeugt die Drehung  $C_2$  und eine der beiden Spiegelungen  $\sigma_v$  oder  $\sigma'_v$  die Gruppe. Aus  $C_2$  und  $\sigma_v$  kann man I und  $\sigma'_v$  erzeugen. Abb. 14 zeigt die aus diesen Überlegungen resultierende Charaktertafel. Sie zeigt relativ übersichtlich, was zueinander symmetrisch (+1) bzw. asymmetrisch (-1) ist.

Je nachdem, aus welcher Fachrichtung man blickt, kann die jeweilige Terminologie verwirrend sein. Zur Verdeutlichung von Unterschieden, aber auch der übergreifenden Zusammenhänge in Mathematik, Kristallographie und Chemie/Molekülphysik, soll das folgende Beispiel dienen: Dazu wurde das trigonal-pyramidale Molekül des Ammoniaks,  $NH_3$ , gewählt. Es ist näherungsweise ein Tetraeder, weil das zusätzliche Elektronenpaar am Stickstoff die 4. Ecke des Tetraeders besetzt. Der Winkel im Tetraeder als platonischem Körper von  $109,47^\circ$  unterscheidet sich kaum vom Winkel  $\angle H-N-H$  von  $107,8^\circ$ . Räumlich bzw. mathematisch gesehen könnte man also mit der Tetraedergruppe  $S_4$  arbeiten. Sie hat  $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$  Elemente, ist eine symmetrische Gruppe (s.o.) und entspricht nach Schoenflies  $T_d$ . In mathematischer Idealisierung soll aber ein gleichseitiges Dreieck mit den Kongruenzabbildungen als Symmetrieeoperationen genügen und wird auch in der Chemie für das  $NH_3$ -Molekül unter Berücksichtigung planarer Symmetrieelemente angewendet, denn für Schwingungen von Atomen ist das freie Elektronenpaar nur bedingt relevant. Aus Sicht der Chemie bzw. Kristallographie nach der Schoenflies-Notation heißt dann die Punktgruppe  $C$  (wegen Drehachse),  $C_3$  (wegen Dreizähligkeit) und  $C_{3v}$  (wegen der vertikalen Spiegelebenen, die die Drehachse enthalten. Aus Sicht der Mathematik ist das



gleichseitige Dreieck auch ein Dieder und die mathematische Gruppe kann  $D_3$  genannt werden (analog  $D_4$  beim gleichseitigen Viereck, also Quadrat). Bei näherer Betrachtung stellt man fest, dass die Symmetrieeoperationen auch als Permutationen einer Menge mit drei Elementen aufgefasst werden können. Solche Gruppen heißen „symmetrisch“, so dass auch die Gruppenbezeichnung  $S_3$  zulässig ist. Manchmal findet man auch die Bezeichnung  $Sym_3$  in der Literatur.



**Symmetrieelemente:**

3 Spiegelebenen  $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3$

1 Drehachse  $C_3$  als Schnittlinie der Spiegelebenen

**Symmetrieeoperationen der Gruppe  $C_{3v}$  ( $D_3$  bzw.  $S_3$ ):**

	$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	$C_3, C_3^2, C_3^3 = I$
Identität	Spiegelungen	Drehungen ( $120^\circ$ bzw. $240^\circ$ nach links)

Abb. 15: Symmetrieelemente und -operationen am Beispiel  $NH_3$

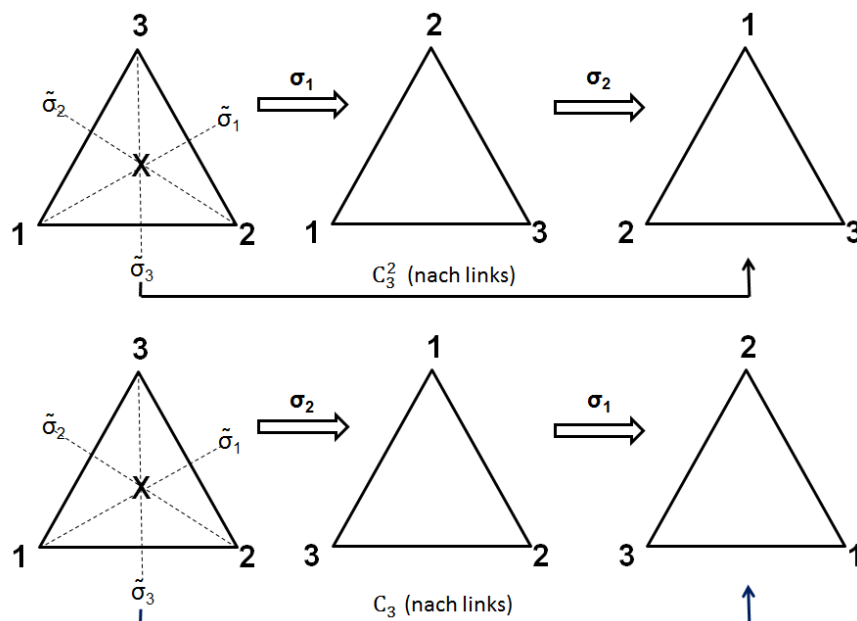


Abb. 16: Illustration von Symmetrieeoperationen bei der Gruppe  $C_{3v}/D_3$

Permutation	Symmetrieoperation	Fehlstellen	Signum	Trivial
$\{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$	$\cong I$ (Identität)	--	+1	+1
$\{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 3, 2\}$	$\cong$ Spiegelung $\sigma_1$	(2,3)	-1	+1
$\{1, 2, 3\} \rightarrow \{3, 2, 1\}$	$\cong$ Spiegelung $\sigma_2$	(1,2),(1,3),(2,3)	-1	+1
$\{1, 2, 3\} \rightarrow \{2, 1, 3\}$	$\cong$ Spiegelung $\sigma_3$	(1,2)	-1	+1
$\{1, 2, 3\} \rightarrow \{3, 1, 2\}$	$\cong$ Drehung $C_3$ n. links	(1,2),(1,3)	+1	+1
$\{1, 2, 3\} \rightarrow \{2, 3, 1\}$	$\cong$ Drehung $C_3^2$ n. links	(1,3),(2,3)	+1	+1

Abb. 17: Symmetrieoperationen der Gruppe  $S_3$ , der Gruppe von Permutationen einer Menge mit 3 Elementen. Sie ist isomorph zur Gruppe  $D_3$  und entspricht der Punktgruppe  $C_{3v}$  (nach Schoenflies) oder  $3m$  (nach Hermann-Mauguin Terminologie). Eine Permutation kann als hintereinander geschaltetes Ausführen von Transpositionen (von links kommend) aufgefasst werden. Fehlstellen geben an, welche Transpositionen (Vertauschen von 2 Zahlen) in der Permutation vorgenommen wurden. Bei gerader Anzahl ist das Signum +1; bei ungerader -1. Dies ist eine der 3 möglichen irreduziblen Darstellungen<sup>37</sup> von  $S_3$ . Der triviale Homomorphismus bildet immer auf das neutrale Element (der Multiplikation in  $\mathbb{C}$ , also +1) ab. Zum 3. Homomorphismus siehe Anm. 42 und Text zu Abb. 19. Es reicht für diese 3 Abbildungen (Homomorphismen), nur die „Bilder“ von  $\sigma_1$  und  $C_3$  anzugeben, denn diese Elemente erzeugen die ganze Gruppe  $S_3$ .

In der Kristallographie fällt diese Symmetrie unter das Trigonale Kristallsystem. In Wikipedia wird die Kristallklasse gemäß  $3m$  nach Hermann-Mauguin als „ditrigonal-pyramidal“ bezeichnet<sup>38</sup>. Sie ist eine der 32 Kristallklassen (kristallographische Punktgruppen). Durch Verschiebungen im Kristallgitter können verschiedene Raumgruppen entstehen. Prominentes Beispiel in dieser Kristallklasse ist der Halbedelstein Turmalin, ein Mischkristall<sup>39</sup>.

37 Signum (Vorzeichen) wird auch als Parität bezeichnet (siehe Physik). Es ist eine eindimensionale irreduzible Darstellung, in der Mathematik eine Funktion, die immer 1 oder -1 ist mit einer Unstetigkeit bei 0. In der Physik gibt die Parität an, ob die Symmetrie bei Punktspiegelung am Ursprung erhalten bleibt und ist eine bedeutende Erhaltungsgröße. Die triviale Abbildung gibt es immer und bildet jedes Element einer Gruppe auf das neutrale Element der Multiplikation in  $\mathbb{C}$ , also der 1, ab.

38 <https://de.wikipedia.org/wiki/Kristallmorphologie> (24.1.2017)

39 <https://de.wikipedia.org/wiki/Turmalingruppe> (24.1.2017)

$C_{3v}/D_3$ $S_3$	I	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$C_3$	$C_3^2$
I	I	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$C_3$	$C_3^2$
$\sigma_1$	$\sigma_1$	I	$C_3$	$C_3^2$	$\sigma_2$	$\sigma_3$
$\sigma_2$	$\sigma_2$	$C_3^2$	I	$C_3$	$\sigma_3$	$\sigma_1$
$\sigma_3$	$\sigma_3$	$C_3$	$C_3^2$	I	$\sigma_1$	$\sigma_2$
$C_3$	$C_3$	$\sigma_3$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$C_3^2$	I
$C_3^2$	$C_3^2$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_1$	I	$C_3$

Abb. 18: Multiplikationstafel der Gruppe  $C_{3v}$  (nach Schoenflies). In der Mathematik heißt sie  $D_3$  oder  $S_3$ . Neben dem hier benötigten Beispiel der Kongruenzabbildungen im gleichseitigen Dreieck (Diedergruppe  $D_3$ ) lässt sich die Gruppe als die 6 möglichen Permutationen einer dreielementigen Menge  $\{1, 2, 3\}$  auffassen (symmetrisch,  $S_3$ ). Somit fällt sie unter die Dieder- und unter die symmetrischen Gruppen. Sie ist eine von zwei nicht isomorphen Gruppen der Ordnung 6 und die kleinste nicht-abelsche Gruppe<sup>40</sup>.

Überprüfung auf Kommutativität:

$\sigma_1 \circ \sigma_2 = C_3$ ,  $\sigma_2 \circ \sigma_1 = C_3^2 \rightarrow$  Das Kommutativgesetz gilt nicht. Somit ist die Gruppe nicht-abelsch. Es ist leicht einzusehen, wieso Gruppen mit der Ordnung 1, 2, 3, 4, 5 abelsch sein müssen. Ordnung 1 hat die triviale Gruppe, die nur aus dem neutralen Element besteht. Die Ordnung 2, 3, 4, 5 können nur Gruppen haben, die isomorph zu den Drehungen von einer Strecke bzw. von regelmäßigem Dreieck, Quadrat oder Fünfeck sein müssen, also zyklisch sind. Die zusätzliche Ausnahme bildet mit Ordnung 4 die sogenannte Klein'sche Vierergruppe (Symmetriegruppe Rechteck), die aber auch abelsch ist.

---

40 Auch eine sog. Zyklendarstellung ist möglich, die die Vertauschung von Ziffern in der Permutation beschreibt. Die zweite Gruppe der Ordnung 6 ( $\mathbb{Z}_6$ ) ist zyklisch und damit abelsch, d.h. die Elemente werden nur von einem erzeugenden Element  $e$  gebildet  $\{i, e, e^2, e^3, e^4, e^5\}$ . Es gibt eine Reihe von verblüffend unterschiedlichen, aber isomorphen Beispielen: Am einfachsten sind noch die Restklassengruppen Modulo 6  $\{i, e, e^2, e^3, e^4, e^5\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  mit  $e=1$  bzw.  $\{i, e, e^2, e^3, e^4, e^5\} = \{0, 5, 4, 3, 2, 1\}$  mit  $e=5$  als erzeugende Elemente und der Addition als Verknüpfung. Oder  $\{i, e, e^2, e^3, e^4, e^5\} = \{1, 3, 2, 6, 4, 5\}$  mit  $e=3$  bzw.  $\{i, e, e^2, e^3, e^4, e^5\} = \{1, 5, 4, 6, 2, 3\}$  mit  $e=5$  als erzeugende Elemente und der Multiplikation als Verknüpfung. Weitere Beispiele siehe <http://www.michael-holzapfel.de/themen/zyklzahl/zyklzahl.htm> (25.01.2017).

$C_{3v}$	I	$2C_3$	$3\sigma_v$		
$A_1$	1	1	1	$T_z$	$\alpha_{x^2+y^2}, \alpha_z$
$A_2$	1	1	-1	$R_z$	
$E$	2	-1	0	$(T_x, T_y), (R_x, R_y)$	$(\alpha_{x^2-y^2}, \alpha_{xy}),$ $(\alpha_{xz}, \alpha_{yz})$

Abb. 19: Punktgruppe  $C_{3v}$  in der von Hollas verwendeten Notation<sup>41</sup> (erweitert um Polarisierbarkeit  $\alpha$ , Rotationen  $R$  und Translationen  $T$  im cartesischen Koordinatensystem um bzw. in Richtung der x-, y- und z-Achse). Mathematisch finden sich in der 3x3-Matrix links die Werte der 3 möglichen irreduziblen Abbildungen von  $S_3$  in  $\mathbb{C}$  bzw.  $M_2(\mathbb{C})$ . Die erste Spalte zeigt, dass dies zwei eindimensionale (trivial, Signum) und eine zweidimensionale Abbildung von  $S_3$  sind ( $M_2(\mathbb{C})$  bedeutet 2x2 Matrizen mit komplexen Werten)<sup>42</sup>.  $2C_3$  heißt, es gibt 2 Drehungen,  $3\sigma_v$  bezeichnet, es gibt 3 Spiegelungen.

Abb. 21 illustriert aus Sicht der Chemie bzw. Molekülphysik, dass „eindimensional“ Schwingungen unter Erhaltung der Symmetrie der Hauptachse bedeutet (Typ  $A$ ), „zweidimensional“ zweifache Entartung durch die hohe Symmetrie der dreizähligen Achse (Typ  $E$ ). Damit lassen sich messbare Eigenschaften von  $NH_3$ , wie das IR-Spektrum (siehe Abb. 20), über die Symmetrie erklären.

41 Hollas, J. Michael; Die Symmetrie von Molekülen, Zur Charaktertafel von  $C_{3v}$  siehe Hollas, Tabelle 4.12, S. 66. Aus Sicht der Mathematik zeigt die Charaktertafel von  $S_3 = C_{3v}$  drei verschiedene Abbildungen/Homomorphismen: 1. Zeile trivialer Gruppenhomomorphismus (Dimension 1), 2. Zeile Signum-Funktion (Dimension 1). Es gilt, dass die Quadrate der Dimensionen der irr. Abb. die Gruppenordnung, also 6, ergeben müssen. Es muss also eine 3. Abb. (Dimension 2) geben, damit  $1^2+1^2+2^2=6$  ergibt. So erklärt sich die „2“. (Weitere Werte ergeben sich aus sog. Orthogonalitätsrelationen.)

42 2-dimensionaler Homomorphismus für die erzeugenden Elemente  $C_3$ =Drehung um  $120^\circ$  nach links und Spiegelung z.B.  $\sigma_1$ . Die beiden anderen Spiegelungen  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  ergeben äquivalente Darstellungen.

$S_3 \rightarrow M_2(\mathbb{C})$ :  $C_3 \rightarrow \begin{bmatrix} e^{2\pi i/3} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i/3} \end{bmatrix}$ ,  $\sigma \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

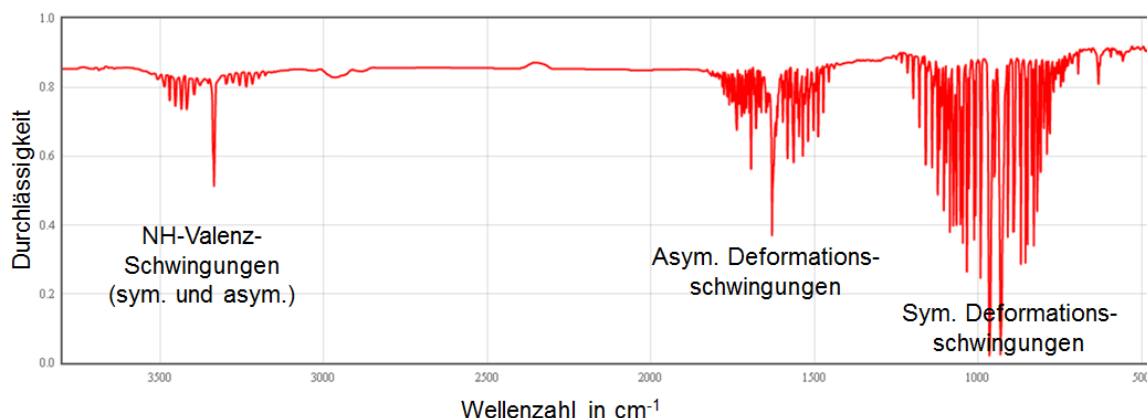


Abb. 20: IR-Spektrum von Ammoniak<sup>43</sup>. Man kann deutlich die IR-aktiven Anregungsfrequenzen gemäß der Tabelle unten erkennen.

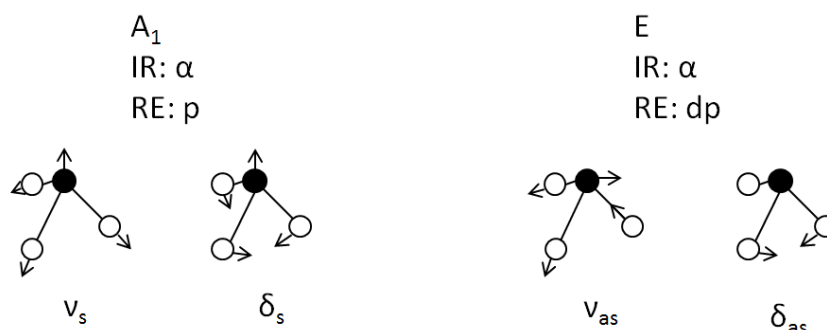


Abb. 21: Infrarot (IR) und Raman aktive (RE) Schwingungsformen eines vieratomigen pyramidenförmigen Moleküls analog zu  $NH_3$ <sup>44</sup>.

Legende zur Terminologie:  $v_s$  bzw.  $v_{as}$  sind symmetrische bzw. asymmetrische Valenzschwingungen, also schwingende Veränderungen des Bindungsabstandes.  $\delta_s$  bzw.  $\delta_{as}$  steht für Deformationsschwingungen, also schwingende Veränderungen des Bindungswinkels.  $A$  bedeutet einen Schwingungszustand, bei dem die Symmetrie der Hauptachse erhalten bleibt,  $E$  sind hier zweifach entartete Schwingungen aufgrund der hohen Symmetrie der dreizähligen Drehachse. IR:  $\alpha$  bedeutet Infrarot aktiv, RE p bzw. dp ist eine polarisierte bzw. depolarisierte Bande beim Raman-Effekt. Die entsprechenden Schwingungsfrequenzen in  $[cm^{-1}]$ <sup>45</sup> bei  $NH_3$  sind in der folgenden Tabelle aufgeführt.

Schwingung	flüssig	gasförmig	fest
$v_s$	3294	3337	3223
$\delta_s$	1054		
$v_{as}$	3380	3444	3375
$\delta_{as}$	1628		

43 Bildnachweis: <http://webbook.nist.gov/chemistry>, nachbeschriftet (01.05.2017).

44 Bildnachweis: Erstellt nach Johann Weidlein, Ulrich Müller, Kurt Dehnicke, Schwingungsspektroskopie, Thieme Verlag, Stuttgart New York, 1982, S. 103.

45 Nach Johann Weidlein, Ulrich Müller, Kurt Dehnicke, Schwingungsspektroskopie, Thieme Verlag, Stuttgart New York, 1982, S. 51 und 103.

Die mathematische Gruppentheorie ist für die Biologie weniger relevant. Symmetrie als Strukturierungselement ist gleichwohl biologisch bedeutsam und mathematisch fassbar, wenn auch oft auf einfache Weise. Die Mathematik hat auf jeden Fall Eingang in die Biologie gefunden. Als erster „Biomathematiker“ gilt D’Arcy Wentworth Thompson mit seinem wegweisenden Buch „Über Wachstum und Form“<sup>46</sup>. Bei der Musterbildung kam auch er um den Begriff „Symmetrie“ nicht herum. Er blieb aber deskriptiv, warnte vor einer „Teleologiefalle“ und dämpfte Erwartungshaltungen an eine geradlinige Evolution: „Alles ist, was es ist, weil es so wurde“<sup>47</sup>.

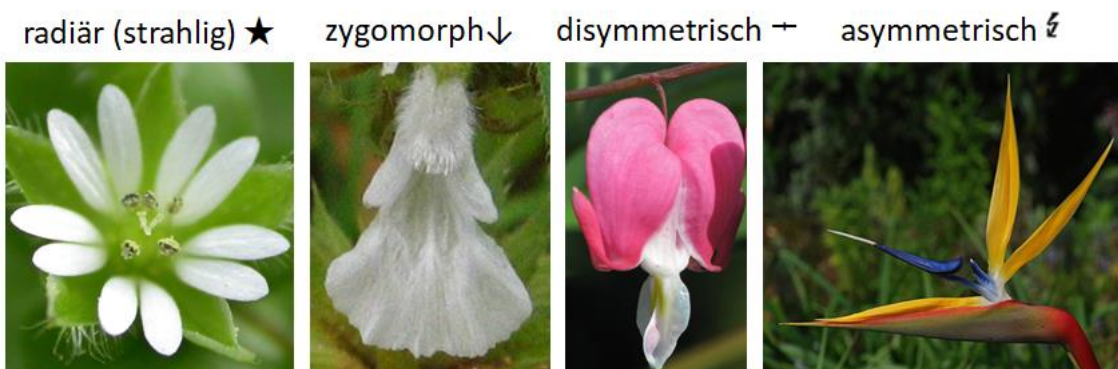


Abb. 22: Symmetrie bei Blüten. Asymmetrie ist dabei extrem selten.

Das übergeordnete Taxon „Bilateria“ (siehe unten), also „Zweiseitentiere“, umfasst die mit Abstand allermeisten Arten. Symmetrie kommt somit in vielen, ja fast allen lebenden Formen vor. Asymmetrisch sind viele Amöben. Symmetrie muss jedoch entweder weiter gefasst und stärker idealisiert werden als in der Kristallographie oder gar der Physik. Oder aber Symmetrie- und Asymmetrieeffekte weisen eine komplexe, dem Selektionsdruck oder anderen Einflüssen gehorchende Gesetzmäßigkeit auf. Gleichzeitig gibt es Grenzen der Quantisierbarkeit. Dies reicht von makroskopischen Eigenschaften bis hin zur Organisationsebene z.B. von Proteinen, wenn die räumliche Anordnung von zwei oder mehr Polypeptidketten eine bestimmte stereometrische Konstellation determiniert.

---

46 „Wir wollen sehen – wenigstens in einigen Fällen -, wie die Formen der lebenden Dinge und ihrer Teile durch physikalische Überlegungen erklärt werden können, und uns klarmachen, dass es im allgemeinen keine anderen organischen Formen gibt als solche, die mit den physikalischen und mathematischen Gesetzen übereinstimmen“. D’Arcy Wentworth Thompson, *Über Wachstum und Form*, Verlag Ab - Die Andere Bibliothek Bd. 255 (2002), Einleitung, S.15.

47 „*Everything is the way it is because it got that way.*“ wird in zahlreichen Publikationen D. W. Thompson zugeschrieben. Die Literaturstelle ist aber unbekannt! Siehe dazu z.B. [bactra.org/notebooks/darcy-thompson.html](http://bactra.org/notebooks/darcy-thompson.html) (20.04.2017).

Die einzelnen Polypeptidketten können als relativ flexible Untereinheiten bezeichnet werden, aber das Gesamtkonstrukt ist einer mehr oder weniger starren, organisch sinnvollen Organisationsform unterworfen, die mathematisch schwer fassbar ist. Hier tun sich aber andere Formen der interdisziplinären Zusammenarbeit auf, z.B. ist ein DNA-Strang über einen Meter lang. Im Zellkern ist er auf ein Fünfmillionstel Meter zusammen geknäuelte. Trotzdem funktioniert Replikation und Trennung der beiden Stränge. Ein Teilgebiet der Mathematik ist die Topologie, in der wiederum Spezialisten sich mit den theoretischen Grundlagen von allen denkbaren unterschiedlichen Knoten und ihrer Auflösung bzw. Transformation beschäftigen. Genetiker und Knotentheoretiker versuchen seit einiger Zeit gemeinsam neue Erkenntnisse zu gewinnen, indem ihre Kompetenzen auch auf DNA-Moleküle angewendet werden<sup>48</sup>. In diesen Themen sind Fragen nach Symmetrieeigenschaften jedoch meist nicht zielführend. Ein deutlich weniger komplexes Beispiel aus der Botanik ist die Unterscheidung nach Symmetrieeigenschaften bei den Blüten<sup>49</sup>. Hier hat man sogar eigene Symbole geschaffen (s. Abb. 22). Hinter dem Begriff „radiär bzw. strahlig“ verbirgt sich die bekannte Drehsymmetrie. Hier wird zur Quantifizierung der nötigen Drehbewegungen oft der Begriff „Zähligkeit“ verwendet: Z.B. ist eine Blüte n-zählig, wenn n Drehungen um den Winkel  $360^\circ/n$  nötig sind, um wieder die Ausgangsstellung zu erhalten. Die Drehachse ist in der Regel der Stängel oder Stamm, also die vertikale Achse. Die Zähligkeit ist aber nicht unbedingt die Anzahl an Blütenblätter. Diese müssen schon in der gleichen Ebene liegen. So ist die Madonnen-Lilie (*Lilium candidum*)<sup>50</sup> nicht sechszählig, weil nur jeweils drei Blütenblätter versetzt um ca.  $60^\circ$  in einer Ebene liegen.



Abb. 23: Die Madonnen-Lilie (*Lilium candidum*) ist nicht sechszählig

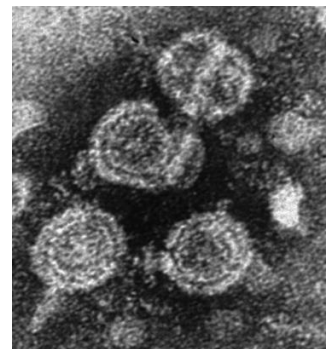


Abb. 24: Hepatitis -B Virus mit ikosaedrischer Struktur.

48 <https://people.math.ethz.ch/~makveld/ArtikelAkveldNeumaier.pdf>, (01.02.2017).

49 Bildquelle: [de.wikipedia.org/wiki/Nelkengewächse](https://de.wikipedia.org/wiki/Nelkengewächse) (*Stellaria media*, radiär), [de.wikipedia.org/wiki/Lippenblütler](https://de.wikipedia.org/wiki/Lippenblütler) (*Leucas aspera*, zygomorph), [de.wikipedia.org/wiki/Tränendes\\_Herz](https://de.wikipedia.org/wiki/Tränendes_Herz) (*Lamprocapnos spectabilis*, disymmetrisch), [de.wikipedia.org/wiki/Strelitzien](https://de.wikipedia.org/wiki/Strelitzien) (*Strelitzia reginae*, asymmetrisch, alle 23.06.2017).

50 Bildquelle: [de.wikipedia.org/wiki/Madonnen-Lilie](https://de.wikipedia.org/wiki/Madonnen-Lilie) (*Lilium candidum*, 18.06.2017).



Über die Drehsymmetrie hinaus gibt es wenige Symmetrieeoperationen, die als ordnendes Prinzip herangezogen werden können. In der Zoologie ist z.B. Radiärsymmetrie trotz der ganzen Fülle an Biodiversität vergleichsweise selten. Trotzdem gibt es in absoluten Zahlen gemessen viele Beispiele von Lebewesen mit dieser Symmetrie (siehe Abb. 26-28 von E. Haeckel), auch wenn diese weitgehend beschränkt auf Organismen ist, die nicht oder kaum in der Lage sind, sich selbst zu bewegen („sessil“).

Eine ganze Klasse von DNA- bzw. RNA-Viren hat sogar ikosaedrische Struktur, auch HIV oder *Herpes simplex* gehören dazu. Die Abb. 24 zeigt eine elektronenmikroskopische Aufnahme von Viren<sup>51</sup>. Es sind Hepatitis-B-Viren. Das ikosaederförmige Capsid<sup>52</sup> ist aus 72 Capsomeren aufgebaut. Capside sind komplexe, regelmäßige Strukturen aus Proteinen bei Viren. Die Kugeln entsprechen den einzelnen Capsomeren. Die Ikosaederstruktur ist nach der Kugel die beste Struktur, um bei gegebenen Bindungsverhältnissen der Viren-DNA oder RNA eine optimale Packungsdichte zu erreichen. Es geht darum, optimal 60 äquivalente Untereinheiten der Proteinhülle zu verpacken. Die Form der Untereinheiten muss alle geometrischen Zwänge von drei Symmetrieeigenschaften erfüllen. Der Ikosaeder besitzt dazu 15 zweizählige, 10 dreizählige und sechs fünfzählige Drehachsen, dazu 15 Spiegelebenen. Weiterhin ist Punktspiegelung am Mittelpunkt möglich. Die aus den Symmetrieeoperationen bestehende mathematische Gruppe („Ikosaedergruppe“) besitzt 120 Elemente. Der Ikosaeder<sup>53</sup> ist einer der fünf platonischen Körper. Die Ikosaeder-Oberfläche besteht aus 20 gleichseitigen Dreiecken. Die Ecken liegen auf den Ecken von drei senkrecht zueinander stehenden Goldenen Rechtecken, also Rechtecke,

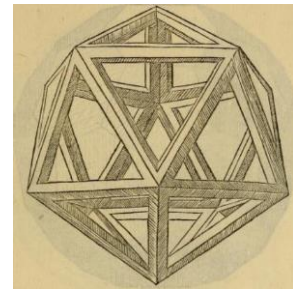


Abb. 25:  
*Ikosaeder.*  
Oben nach einer  
Zeichnung von  
Leonardo da Vinci in  
Luca Pacioli's *De  
Divina Proportione*.  
Unten in moderner  
3d-Grafik.

---

51 Bildquelle: [de.wikipedia.org/wiki/Hepatitis-B-Virus](http://de.wikipedia.org/wiki/Hepatitis-B-Virus) (01.02.2017).

52 Man liest auch die Schreibweise „Kapsid“.

53 Oben: Nach einer Zeichnung von Leonardo da Vinci in Luca Pacioni's „De Divina Proportione“, Ausgabe von 1509, S. 241; Bildnachweis:

<https://archive.org/details/divinaproportion00paci>

Unten: Bildquelle <http://www.3d-meier.de/tut12/Seite3.html>.

Mit freundlicher Genehmigung von Herrn Jürgen Meier.

deren Seitenverhältnis im Goldenen Schnitt steht<sup>54</sup>. Dementsprechend kommt der Goldene Schnitt in vielen Formeln zu Volumen und vielen anderen Beziehungen im Ikosaeder vor. Dies gilt besonders für die kartesischen Koordinaten der 12 Ecken. Wenn man den Mittelpunkt eines Ikosaeders mit der Kantenlänge 2 in den Ursprung, also Achsenschnittpunkt, legt, so taucht der Goldene Schnitt  $\varphi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$  sechsmal auf (zweimal pro Achse)<sup>55,56</sup>. In der unbelebten Natur der Kristalle kann ein Ikosaeder als Einkristall wegen der fünfzähligen Drehachsen übrigens nicht vorkommen, da keine raumfüllende Struktur möglich ist.

Eine Art in der Tierwelt hat ebenfalls eine ikosaederförmige Struktur und trägt dieses Strukturmerkmal sogar im Namen, nämlich die Radiolarie *Circogonia icosahedra*<sup>57</sup>, hier gezeichnet von Ernst Haeckel. An dieser Stelle bietet sich an, auf das Werk von Haeckel mit einigen Beispielen aus seiner lithographischen Buchsammlung „Kunstformen der Natur“ zu verweisen, aus der die Radiolarie stammt (10 Bände, erschienen 1899-1904). Diese Beispiele sollen vorab die eingangs angesprochene „ästhetische Seite“ von Symmetrie illustrieren. Diese Seite allein wird aber Ernst Haeckel keinesfalls gerecht<sup>58</sup>. Nach einigen weiteren Aspekten, u.a. zur Terminologie von symmetrischen Strukturen, soll Haeckel nochmals angesprochen werden.

---

54 Einer interdisziplinären Ausstellung zum Goldenen Schnitt hat sich 2017 die Museumsstiftung Post und Telekommunikation gewidmet (inkl. biologischer Aspekte). Essay-Begleitband: Göttlich Golden Genial, Hirmer Verlag München, 2016.

55 Beweisidee: Jede Symmetrieebene des Ikosaeders enthält vier Ecken ( $E_1, E_2, E_3, E_4$ ) und vier Kantenmittelpunkte ( $K_1, K_2, K_3, K_4$ ), wovon zwei mit den Ecken ein regelmäßiges Sechseck bilden. In seiner Mitte liegt der Ikosaedermittelpunkt M; eine Kante habe die Länge a. Über Pythagoras und Höhensatz erhält man eine quadratische Gleichung, von der nur die positive Lösung sinnvoll ist. Der Abstand von M zu den  $K_i$  beträgt dann  $a/4(1+\sqrt{5})$ . Für  $a=2$  ist das der Goldene Schnitt.

56 Der Leipziger Mathematiker Felix Klein hat eine berühmte Vorlesung zu den fünf regulären Körpern, insbesondere des Ikosaeders und der Ikosaeder-Gruppe, gehalten. Klein, Felix; Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. G.B. Teubner, Leipzig, 1884. Dort wird z.B. die berühmte Klein'sche Vierergruppe erwähnt und die Tatsache, dass die Gruppe der 60 Ikosaeder-Drehungen mit den 60 Vertauschungen von fünf Dingen (Permutationen z.B. von  $\{a, b, c, d, e\}$ ) holoeidrisch isomorph ist. Es ist Teil seines „Erlanger Programms“, einer Metatheorie der Geometrie auf der Basis von Transformationseigenschaften (siehe dazu auch nächstes Kapitel).

57 Die Abbildung der Radiolarie und die folgenden Abbildungen stammen aus Ernst Haeckel, Kunstformen der Natur, Leipzig und Wien, Verlag des Bibliographischen Instituts, (1899-1904).

58 Die „Tragfähigkeit des Symmetriebegriffs als Brücke oder Dach von Kunst und Wissenschaft“ wurde in folg. Aufsatz untersucht: Joachim Schummer, Symmetrie und Schönheit in Kunst und Wissenschaft. Erschienen in: Wolfgang Krohn (Hg.): Ästhetik in der Wissenschaft, Hamburg: Meiner, 2006, S. 59-78 (Sonderband der Zeitschrift für Ästhetik und Allgemeine Kunstwissenschaft).

[http://joachimschummer.net/papers/2006\\_Symmetrie\\_Krohn.pdf](http://joachimschummer.net/papers/2006_Symmetrie_Krohn.pdf) (21.04.2017)

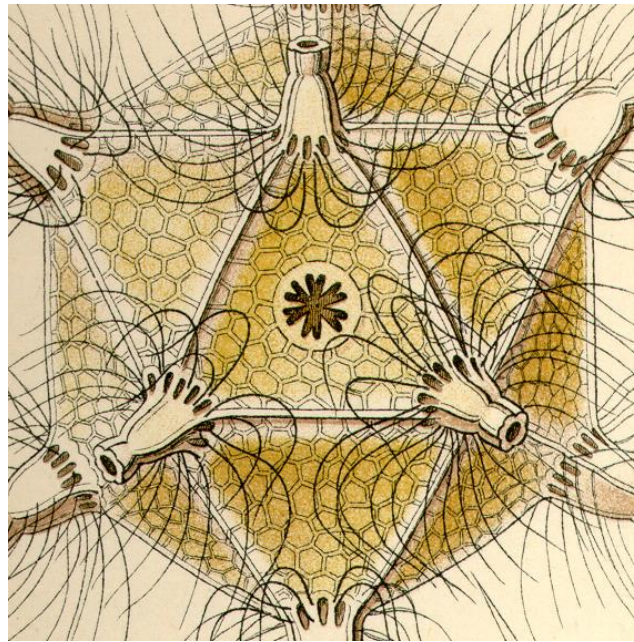


Abb. 26: Radiolarie **Circogonia icosahedra**

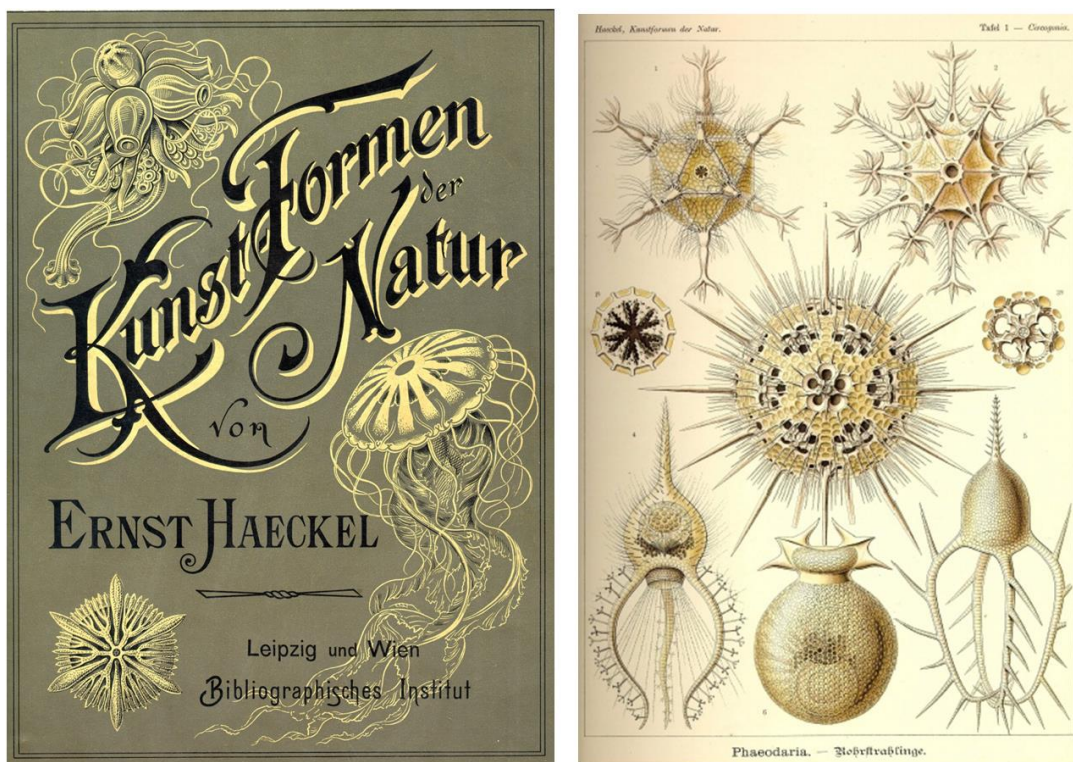


Abb. 27: HTML-Version herausgegeben von Kurt Stüber, 1999<sup>59</sup>, fast vollständige elektronische Faksimile-Ausgabe, inkl. des Titelbildes der Komplettausgabe aus dem Jahr 1904.

<sup>59</sup> siehe [caliban.mpiiz.mpg.de/haeckel/kunstformen/index.html](http://caliban.mpiiz.mpg.de/haeckel/kunstformen/index.html) (16.03.2017)



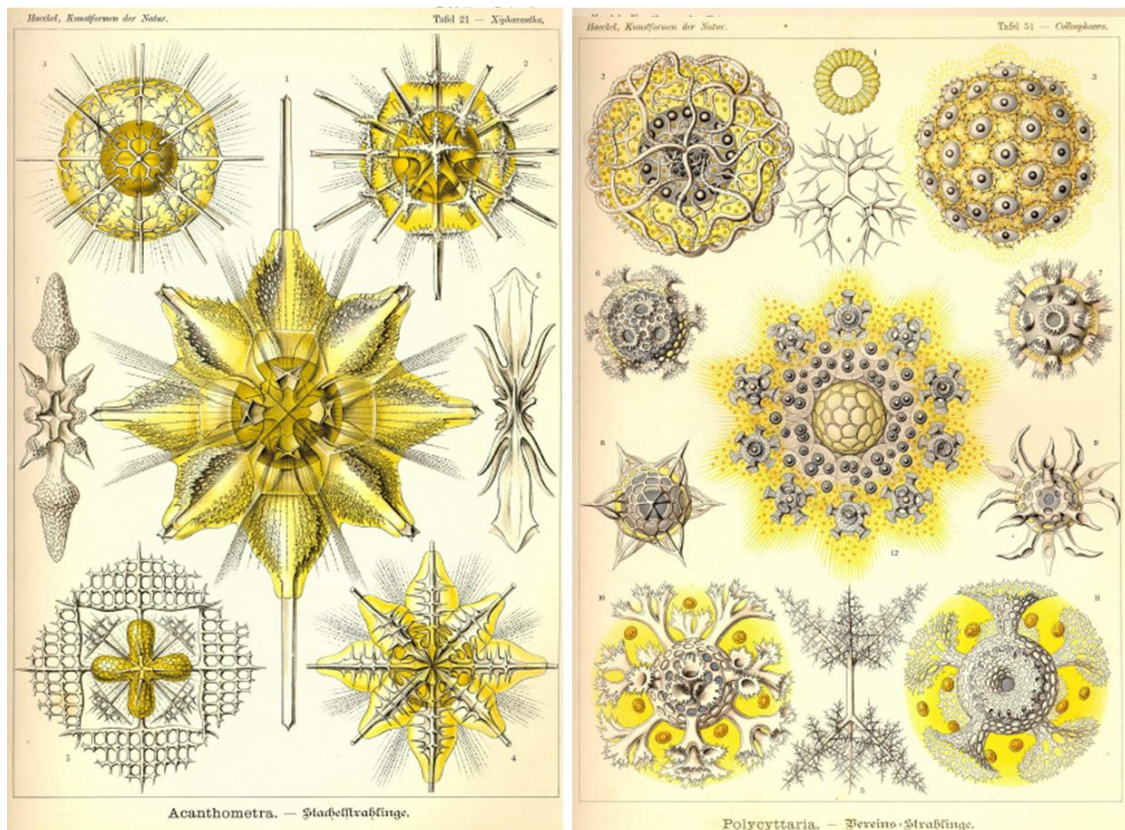


Abb. 28: Weitere Beispiele aus Ernst Haeckel, *Kunstformen der Natur*.

95% aller Tierarten auf der Erde sind bilateral-symmetrisch. Das übergeordnete Taxon „Bilateria“ fasst diese unter diesem Begriff zusammen, der die charakteristische Spiegelebene adressiert, so dass beide Hälften des Körpers symmetrisch zu einer sogenannten Sagittalebene liegen (sozusagen in Pfeilrichtung nach lateinisch sagitta, Pfeil). Außerdem kann man bei Bilateria eindeutig eine Dorsalseite (dorsum, Rücken) und eine Ventralseite (venter, Bauch) unterscheiden. Als einzelnes Merkmal einer spiegelsymmetrischen Form in der Natur ist die Chiralität zu nennen (nach griechisch χέρι=chéri=Hand). Die menschlichen Hände sind das wichtigste Beispiel für spiegelsymmetrische, chirale Paare in der Biologie. Sie lassen sich nicht durch eine Drehung zur Deckung bringen. Mathematisch gesehen ist in der Gruppentafel der Diedergruppe  $D_4$  die Symmetrieoperation  $\sigma_1$  ein Beispiel, das, wenn überhaupt, dem Sachverhalt noch am nächsten kommt. Mehrere Symmetrieebenen findet man ebenfalls. Pio Fioroni<sup>60</sup> widmet in seiner „Allgemeinen und vergleichenden Embryologie der Tiere“ dem Symmetriebegriff ein Kapitel. Immerhin ist ein riesiger Bereich der Biologie davon betroffen. So umfasst allein die Unterklasse Hexacorallia, sechsstrahlige Blumentiere oder Zoantharia mit sechs bis heute lebenden

60 Fioroni, Pio; Allgemeine und vergleichende Embryologie der Tiere“, Springer Verlag, 1987, S.19.

Ordnungen fast 4.000 der über 6.000 Arten der Klasse der Blumentiere<sup>61</sup>. Besonders häufig äußert sich Chiralität beim Drehsinn. Im Abschnitt zur „Chemie“ wurde bereits optische Aktivität angesprochen. Sie kommt bei chemisch gleichen Verbindungen vor, die sich nur in der Symmetrie unterscheiden und deshalb die Schwingungsebene von polarisiertem Licht unterschiedlich beeinflussen („linksdrehend“ und „rechtsdrehend“). Sie fallen unter den Begriff „Enantiomere“. In diesem Abschnitt werden Beispiele aus Biologie und Chemie zu diesen Phänomenen diskutiert. So kommen bei den Landschnecken, z.B. der Weinbergschnecke *Helix pomatia*, vorwiegend rechtsdrehende Gehäuse vor. Es gibt allerdings Mutationen im Bereich von kleiner/gleich 0,1 Promille mit linksdrehendem Drehsinn. Weil jedoch bei den Schnecken als Hermaphroditen der ganze Körper inkl. der Genitalien von der Drehrichtung abhängt<sup>62</sup>, sind spiegelverkehrte Mutanten in der Regel nicht fortpflanzungsfähig<sup>63</sup>. Der Leidener Evolutionsbiologe Menno Schilthuizen hat intensiv die Gattung *Amphidromus* untersucht. Es ist die einzige Gehäuseschnecke weltweit unter immerhin 150.000 Arten mit rechts- oder links gewundenen Gehäusen, deren Vertreter untereinander paarungsfähig sind. Hier „passen“ die Geschlechtsorgane unabhängig vom Drehsinn zusammen<sup>64</sup>. Es sind „simultane Hermaphroditen“; beide Partnerinnen nehmen die männliche Rolle ein und profitieren somit jeweils vom anderen Drehsinn<sup>65</sup>. Rechtshändige und linkshändige Formen bei männlichen Genitalien kommen auch bei einigen Arten der Gottesanbeterinnen vor (Gattung *Ciulfina*)<sup>66</sup>. Dagegen sind übrigens die entsprechenden Genitalien der Weibchen alle symmetrisch im Sinne, dass zwei geeignet gedachte Hälften sich durch einfache Spiegelung zur Deckung bringen lassen. Es ist ein Widerspruch zum alltäglichen, komplementären Schlüssel-Schloss-Prinzip („Ergänzungssymmetrie“), der nur funktional zu begründen ist.

Von nicht zu unterschätzender Bedeutung ist der funktionale Aspekt der Symmetrie in der Biologie. Trivial aber bedeutsam erscheint es, dass ein symmetrischer Organismus (z.B. mit gleichlangen Beinen rechts und links) besser funktionieren wird. Es sollte daher einen (evolutionären) Selektionsdruck auf eine solche Symmetrie geben. Es gibt sehr

---

61 <https://de.wikipedia.org/wiki/Hexacorallia>

62 Schilthuizen, M. P.G. Craze, et.al. Sexual Selection Maintains Whole-Body Chiral Dimorphism, *Journal of Evolutionary Biology*, 20:1941-49

63 Schilthuizen, M., Divison A., The Convoluting Evolution of Snail Chirality. *Naturwissenschaften*, 92:504-515

64 Weitere Beispiele s.a. Menno Schilthuizen, *Darwins Peep Show*, dtv München, 2014, S. 265 f, *Amphidromus* bedeutet „in beide Richtungen drehend“.

65 Ebenda S. 272.

66 Schilthuizen, Menno; S. 61, mit Verweis auf Holwell und Herberstein, *Journal of Morphology* 271: 1176-84

aussagekräftige experimentelle Studien zu solchen funktionalen Aspekten. Die Symmetrie der Blüten hat beispielweise Konsequenzen für deren Attraktivität für blütenbestäubende Insekten. Symmetrische Blüten, deren Blütenblätter auf beiden Seiten gekürzt wurden, werden von Bienen besser besucht als solche, deren Blütenblätter einseitig gekürzt wurden<sup>67</sup>. Die Symmetrie von Ornamenten wie Hörnern oder Schwanzfedern spielt eine wichtige Rolle in der sexuellen Selektion, wie der Partnerwahl durch Weibchen<sup>68</sup>. Auch bei menschlichen Gesichtern und der Bedeutung für Attraktivität ist dies gut untersucht<sup>69</sup>. Besonders bemerkenswert ist die Bedeutung von Abweichungen von der strengen Symmetrie – und zwar rechts oder links, also nicht einseitig. Dabei spricht man von „fluktuierender Asymmetrie“, wenn die Rechts-Links-Unterschiede einer Normalverteilung entsprechen, deren Mittelwert in etwa Null ist. Dieses Phänomen kann auch krankhafte Ursachen haben; es kann ein Indikator für umweltbedingten oder genetischen Stress sein<sup>70</sup>. Symmetrie und Asymmetrie haben aber insgesamt meist sehr differenzierte Bedeutungen, weit über Attraktivität der Geschlechter oder Monitor für Stress hinaus – siehe zum Beispiel Anm.<sup>71</sup>.

Man muss also in der Biologie einerseits stärker abstrahieren und idealisieren, andererseits stehen Differenzierungen oft in einem sehr komplexen biologischen Zusammenhang unter dem Einfluss entsprechender (evolutionär wirkender) Rahmenbedingungen. Dabei kann man biologische Komplexität nicht mit mathematischer Komplexität gleichsetzen und meist auch nicht korrelieren. Schließlich werden auch bei den meisten unter das Taxon „Bilateria“ fallenden Arten wohl beide Hälften nie exakt spiegelsymmetrisch sein. Aber das hat Gründe, die zumindest z.B. über den Begriff der „fluktuierenden Asymmetrie“ adressiert werden und deren Ursachen erforscht werden können.

Dagegen sind in der Chemie bei enantiomeren Molekülen die prinzipiellen Bindungsverhältnisse vollkommen gleich. Prominente Beispiele findet man

---

67 Proc. Natl. Acad. Sci. USA Vol.92, pp.2288-2292, March1995, Evolution, Bumblebee preference for symmetrical flowers, Anders Pape Møller

68 Bilateral Symmetry and Sexual Selection: A Meta Analysis; A. P. Møller and R. Thornhill. Source: The American Naturalist, Vol. 151, No. 2 (February 1998), pp. 174-192.

69 Journal of Comparative Psychology1994, Vol. 108, No. 3, 233-242, Human (Homo sapiens) Facial Attractiveness and Sexual Selection: The Role of Symmetry and Averageness, Karl Grammer, Randy Thornhill

70 P. A. Parsons, Fluctuating asymmetry: a biological monitor of environmental and genomic stress, Heredity 68 (1992) 361—364, The Genetical Society of Great Britain, 1991.

71 Anthony C. Little et. al., Symmetry Is Related to Sexual Dimorphism in Faces: Data Across Culture and Species; Published: May 7, 2008, <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0002106> (20.04.2017).

z.B. bei den Zuckermolekülen oder bei der Milchsäure<sup>72</sup>. Da immer die 3. Dimension eine Rolle spielt, aber auf Papier eine eindeutige planare Darstellung erforderlich ist, sind Darstellungsformen entwickelt worden. Außerdem muss der formale Name des Moleküls eindeutig sein und den Drehsinn charakterisieren. Man findet häufig noch die alte Bezeichnung („Fischer-Projektion“) mit D(extro) = rechtsdrehend und L(evo) = linksdrehend. Eine Mischung aus beiden Varianten wird gelegentlich mit dem Präfix „Rac“ wie Racemat charakterisiert<sup>73</sup>. Die moderne Darstellungsweise ist (+) für rechts- und (–) für linksdrehend.

Zu den angesprochenen Beispielen: Rüben- bzw. Rohrzucker (Sacharose, ein sog. Doppelzucker) ist rechtsdrehend. Ebenfalls kommt der Traubenzucker (früher Dextrose) in der Natur nur rechtsdrehend vor. Milchsäure kommt dagegen in beiden enantiomeren Varianten vor. Sie entsteht durch bakteriellen Abbau des Milchzuckers (Lactose). Säuglingen fehlt im ersten halben Jahr noch das entsprechende Enzym, um linksdrehende Milchsäure verdauen zu können, was bei falscher Ernährung, z.B. mit ungeeignetem Joghurt, zu einer Übersäuerung führen kann. Im Übrigen gilt, dass enantiomere Formen sich in Geruch, Geschmack oder sogar Toxizität von der Form mit anderem Drehsinn unterscheiden können<sup>74</sup>. Beim Contergan-Skandal war es sogar ein fruchtschädigender Effekt des Wirkstoffes Thalidomid beim ungeborenen Kind. Auch die nachträgliche Umwandlung im Stoffwechsel („Metabolisierung“) kann insbesondere bei Pharmazeutika problematisch sein. Es ist bemerkenswert, dass die Natur durchaus nur eine enantiomere Form herstellen kann; in der chemischen Synthese ist dies nicht ohne weiteres möglich. Pierre Curie hat diese Tatsache (aus der Festkörperphysik heraus) zu einem physikalischen Symmetrieprinzip verallgemeinert. Symmetrie ist damit im Prinzip zu einem Erhaltungswert in allen kausalen Prozessen geworden<sup>75</sup>.

Die lebenswichtigsten Aminosäuren sind alle linksdrehend. Es wird manchmal spekuliert, dass die Natur dies deshalb so bevorzugt, weil in der schwachen Wechselwirkung linksdrehend dominiert und nur der unten angesprochene Symmetriebruch beim neutralen Kaonenzerfall eine Ausnahme bildet.

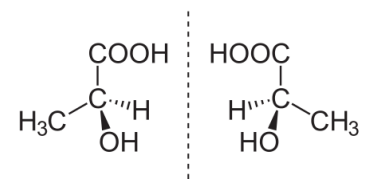


Abb. 29: Die zwei Enantiomere der Milchsäure.

72 Bildnachweis der Strukturformeln: [de.wikipedia.org](https://de.wikipedia.org), Stichwort Milchsäure (14.01.2017)

73 Es ist meist sehr schwierig, eine optisch aktive, enantiomere Substanz in reiner Form zu synthetisieren.

74 Beispiele siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Enantiomer> (20.04.2017)

75 <https://de.wikipedia.org/wiki/Curie-Prinzip>



Eine Erweiterung des Symmetriebegriffes, der erst recht nicht mehr gruppentheoretisch beschrieben werden kann, ist die „Symmetrie“ bzgl. Streckungs- oder Stauchungsoperationen also eine Proportionalitätsbeziehung. Insbesondere bei Selbstähnlichkeit und Fraktalen in der Biologie findet man „Skalensymmetrie“; d.h. ähnliche Strukturen in unterschiedlichen Größenordnungen. Eine fraktale (also gebrochene, nicht-euklidische) Dimension kann scheinbar allometrische Daten, z.B. beim Stoffwechselumsatz unterschiedlich großer Landsäugetiere, erklären<sup>76</sup>. Verwandt ist der Begriff „Isomerie“. So korreliert z.B. das Gewicht der Leber bei vielen Säugetieren und dem Menschen sehr genau mit ihrem Körpergewicht<sup>77</sup>. Gegenbeispiel ist die Gehirnmasse. Hier spricht man von Allometrie („das andere Maß“).

Auch in der Terminologie der Chemie wird „Isomerie“ über die Spiegelsymmetrie der Enantiomere hinaus verwendet. Isomere Verbindungen sind generell unterschiedliche Stoffe, die aber die gleiche Summenformel haben. Das erste Beispielpaar war Silberfulminat  $\text{Ag}^{\oplus}(\text{O}-\text{N}\equiv\text{C})^{\ominus}$  und Silbercyanat  $\text{Ag}^{\oplus}(\text{O}-\text{C}\equiv\text{N})^{\ominus}$ <sup>78</sup>. Berühmt und schließlich von historischer Bedeutung für die terminologische Trennung von organischer Chemie und anorganischer Chemie sind auch die Isomere Ammoniumcyanat  $\text{H}_4\text{N}^{\oplus} \ominus \text{O}-\text{C}\equiv\text{N}$  und Harnstoff  $\text{O}=\text{C}(\text{NH}_2)_2$ , der sich in endothermer Reaktion aus Ammoniumcyanat in der Wöhler'schen Harnstoffsynthese herstellen lässt<sup>79</sup>.

Der nächste Abschnitt widmet sich einem Biologen, der Mitte des 20. Jahrhunderts einen weiteren Versuch unternommen hat, Symmetrie als Strukturierungsmerkmal für die Biologie stärker heranzuziehen. Die Ansätze von ihm und Ernst Haeckel sollen repräsentativ verglichen werden. Natürlich sind dies nicht die einzigen Biologen, die sich mit Symmetrie beschäftigt haben (siehe z.B. Literaturhinweis Josef H. Reichholf, „Der Ursprung der Schönheit“).

---

76 Willi Kafitz, Die Natur denkt fraktal! Oberhess. Naturwissen. Zeitschrift 2016, 66: 7-37, Gießen mit Bezug auf Manfred Sernetz; Fraktale biologische Strukturen: Chaos und Ordnung im Organismus, Berichte der Justus-Liebig-Gesellschaft, Gießen 2001.

77 Hans Riedwyl, Lineare Regression und Verwandtes: Beispiele mit Lösungsvorschlägen, Basel Boston Berlin, Birkhäuser 1997, S.59f.

78 Erste Ergebnisse im Jahr 1820 durch Justus Liebig, Gay-Lussac und Friedrich Wöhler, Beweis der Isomerie 1824; Ann. Physik, 1, 87 (1824) J. Liebig, J.L. Gay-Lussac und Ann. Physik, 1, 117 (1824) F. Wöhler; siehe auch Sieghard Neufeldt, Chronologie Chemie: Entdecker und Entdeckungen, John Wiley & Sons, 2016.

79 Siehe z.B. O. Wallach (Hg.): Briefwechsel zwischen J. Berzelius und F. Wöhler; Sändig Reprint Verlag, Hans R. Wohlwend, Vaduz/Liechtenstein 1984.

Wilhelm Troll war ein deutscher Botaniker, der bis zu seiner Emeritierung an der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz tätig war. Dort hat er z.B. unter schwierigsten Nachkriegsbedingungen mit großer Eigenleistung den Botanischen Garten aufgebaut. Er arbeitete vor allem an der Morphologie der Pflanzen in der Tradition von Johann Wolfgang von Goethe<sup>80</sup>. Das war in den 1950er Jahren ein längst überholter wissenschaftlicher Ansatz, aber durch Fleiß und Materialfülle konnte Troll dennoch interessante Beiträge liefern. In seinem Lehrbuch „Allgemeine Botanik“<sup>81</sup> widmet Troll sich dem Thema „Symmetrie“ im ganzen achten Kapitel und versucht eine möglichst umfassende, systematische Strukturierung von Symmetrie in der belebten Natur. Obwohl veraltet, ist dieser morphologische Ansatz bei der Pflanzensymmetrie durchaus reizvoll. Während z.B. die Taxonomie nach immer neuen Unterschieden sucht, um die Biodiversität zu beschreiben, zu benennen, unzweifelhaft zu bestimmen und zu klassifizieren, so geht es bei den Symmetriebetrachtungen eher um Gemeinsamkeiten. Troll hat dabei wichtige Begriffe geprägt.

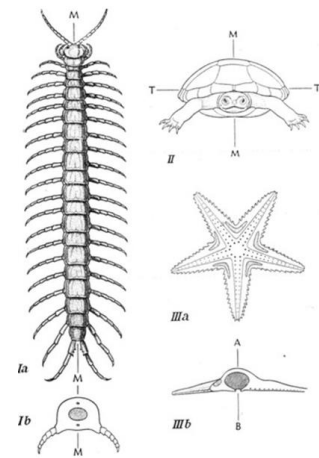


Abb. 30:  
Beispiele aus Wilhelm  
Trolls Symmetriellehre  
für longitudinale und  
laterale Symmetrie

Interessanterweise kommen seine Beispiele mehr aus der Zoologie als aus der Botanik. Dieses Vorgehen wird mit der „Geschlossenheit des Körperbaus“ bei Tieren begründet (S. 98). Er beginnt jedoch zunächst klassisch mit einer Begriffsdefinition und einer formalen Strukturierung des Themas Symmetrie in Translationen, Drehungen und Spiegelungen. Die weit gefasste Translationssymmetrie erweitert dabei durchaus den Symmetriebegriff, wie er z.B. so in der Kristallographie nicht gebräuchlich ist. So wäre eine schön gewachsene Tanne mit immer kürzeren Zweigen, die im gleichen Abstand zueinander stehen, ein Beispiel für Translationssymmetrie in der belebten Natur. Troll macht dazu aber nur eine sehr abstrakte Skizze (S. 97, Abb. 77, IV). Dazu kommt natürlich noch im Prinzip die Drehachse durch den Stamm

80 [https://de.wikipedia.org/wiki/Wilhelm\\_Troll](https://de.wikipedia.org/wiki/Wilhelm_Troll), dem Autor standen zudem einige Informationen aus zweiter Hand durch einen akademischen Schüler von Troll zur Verfügung (Privatmitteilung PD Dr. S. Schneckenburger, TU Darmstadt).

81 Troll, Wilhelm, Allgemeine Botanik, Ferdinand Enke Verlag Stuttgart, 4. Auflage, 1973. Dem Autor lag die 2. unveränderte Auflage von 1954 und zur Symmetriellehre die „4. verbesserte und vermehrte Auflage“ von 1973 vor (s.a. Literaturverzeichnis). Das Kapitel Symmetriellehre findet sich auf den Seiten 79-91 (2. Auflage) bzw. 96-109 (4. Auflage). Wenn nicht anders angegeben, beziehen sich die Seitenangaben im Text auf die 4. Auflage. Bildquelle: Troll, Wilhelm, Allgemeine Botanik, Ferdinand Enke Verlag Stuttgart, 4. Auflage, 1973, Abb. 79, S. 99. Mit freundlicher Genehmigung durch die Georg Thieme Verlag KG als Rechtsnachfolger.

und entsprechende Spiegelebenen, die ebenfalls den Stamm enthalten. Bei der Drehachse wird auf den Begriff der Zähligkeit hingewiesen. Mehr biologisch motiviert erfolgt die Unterscheidung in zwei grundsätzliche Formen der Symmetrie (S. 100).

- I. Longitudinale Symmetrie (Metamerie)
- II. Laterale Symmetrie
  - a. Actinomorphie (Paramerie)
  - b. Bilateralität (ebenfalls Paramerie)
  - c. Dorsiventralität (Antimerie)

Beispiele<sup>82</sup>:

Longitudinal: Scolopender (Gliederfüßler)

Die Glieder heißen Metamere, daher der Begriff Metamerie.

Lateral: Hier ist der Scolopender ebenfalls ein Beispiel durch die spiegelbildliche Symmetrie beider Körperhälften (analog Schildkröte). Als weiteres Beispiel für laterale Symmetrie dient hier der Seestern mit einem fünfstrahligen, radiären Bau (auch als Actinomorphie bezeichnet (S. 99 oben)). Dorsiventralität (Antimerie) steht für die unterschiedliche Rücken- und Bauchansicht. Die laterale Symmetrie bei Blüten wurde schon in Abb. 22 thematisiert. Für weitere Begriffe und Anwendungen in der Botanik sei für vertiefende Betrachtungen auf die Originalliteratur verwiesen. Der Abschnitt §3, longitudinale Symmetrie, verweist auch auf „Deckoperationen“ wie Gleitspiegelung und Schraubung beim Pflanzenwachstum. Troll erkannte die Kombination von Deckoperationen wie Translation und Rotation bei der Schraubung bzw. Spirale. Sie treten selten in mathematisch reiner Form auf, sondern werden durch (Zitat) „*Polarität*“ modifiziert. Hier kommen besonders die in der Einleitung dieses Beitrags genannten sprachlichen Grauzonen zum Tragen. Polarität im Troll'schen Sinne ist einerseits (Zitat) „*Antithese des Ungleichartigen*“ und damit zur Symmetrie ein (Zitat) „*konträres Prinzip*“ (S.106 oben), sie ist aber trotzdem laut Troll insbesondere mit der „Längensymmetrie“ (longitudinal) sehr oft verknüpft.

Das Bemerkenswerte an dieser Formulierung ist die Tatsache, dass hier durch Troll sprachliche Unschärfe beim Thema Symmetrie, offenbar wegen der übergroßen Bandbreite an Beispielen in der Biologie, billigend in Kauf genommen wird. Troll scheint vor der Biodiversität zu kapitulieren. Zumindest bewegt sich diese Charakterisierung des Symmetriebegriffes in einem sprachlich und erst recht mathematisch-naturwissenschaftlich nicht mehr sauber fassbaren Bereich und kollidiert damit zumindest mit dem Kant'schen Verständnis einer „*reinen Naturlehre*“.

---

82 Textquelle: Troll, Wilhelm, Allgemeine Botanik, Ferdinand Enke Verlag Stuttgart, 4. Auflage, 1973.

Erst mit den oben diskutierten Begriffen wie fluktuierende Asymmetrie wird wieder eine wohldefinierte, sprachliche Grundlage geschaffen. Auch die funktionale Symmetrie mit Termini wie z.B. Ergänzungssymmetrie / Komplementarität („Antisymmetrie“) schafft hier eine wissenschaftliche Basis.

Berührungspunkte zur Physik bietet schließlich nicht zuletzt die dynamische Symmetrie, insbesondere bei Bewegungen, bei deren Untersuchung man wieder bei D.W. Thompson anknüpfen könnte.

Als gänzlich anderen Standpunkt soll hier nochmals auf Haeckel verwiesen werden. Ernst Haeckel hat eine Reihe von Reisen bzw. Seereisen machen können. Seine meeresbiologischen Monographien sind auch heute noch wissenschaftlich interessant. Er war neben vielen anderen Aktivitäten auch maßgeblich an der Auswertung der Challenger-Expedition<sup>83</sup> beteiligt, wohl die erste globale reine Forschungsexpedition überhaupt. Er dokumentierte allein 3.500 verschiedene Radiolarien<sup>84</sup>. Mit seinen biologischen Kenntnissen und seinem großen zeichnerischen Geschick hat er eine ganze Reihe ästhetisch faszinierender Monographien geschaffen. Es fallen vor allem die symmetrischen Muster der Meeresbewohner auf, die in diesen Werken anspruchsvoll dokumentiert wurden, auch wenn manches idealisiert dargestellt erscheint. Was seine Bildmuster betraf, so war er ein Kind des Jugendstils, der die Natur ästhetisierte. Seine Werke zur damals neuen Evolutionstheorie waren wegweisend für die ganze Epoche. Symmetrie war bei ihm ein zentraler Theoriebestandteil. Die ästhetisch schönen Abbildungen von Ernst Haeckel, insbesondere seine symmetrischen Organismen aus „Kunstformen der Natur“, sollten nicht bedeuten, dass er natürliche, symmetrische Formen nur auf ihren ästhetischen Reiz reduziert hat<sup>85</sup>. In seinen Zeichnungen hat er sich nicht zwischen Kunst und Wissenschaft entschieden, sondern für beides. Naturformen werden zwar scheinbar wie Kunstformen dargestellt, aber für Haeckel war es ein Mittel, um „*zeichnend und malend tiefer in das Geheimnis ihrer Schönheit einzudringen*“<sup>86</sup>. Eine Idealisierung weist er von sich; „diese

---

83 Siehe z.B. Zum tiefsten Punkt der Weltmeere: Die Challenger-Expedition (1872 – 1876); Rudolf von Willemoes-Suhms, Briefe von der Challenger-Expedition mit Auszügen aus dem Reisebericht des Schiffsingenieurs W. J. J. Spry, Hrsg. Gerhard Müller, Verlag Thienemann, Edition Erdmann, Stuttgart 1984.

84 Als Vorbild diente René Binet für sein monumentales Tor zur Pariser Weltausstellung von 1900 eine von Haeckel gezeichneten Radiolarien.

85 An dieser Stelle sei auf das Buch des Evolutionsbiologen Josef H. Reichholf „Der Ursprung der Schönheit“ verwiesen (S. 203 ff). Im Kapitel „Symmetrien und ihre Bedeutung“ werden ästhetische Aspekte und funktionale Aspekte von Symmetrie gemeinsam diskutiert.

86 Haeckel, Kunstformen der Natur, Leipzig und Wien, Verlag des Bibliographischen Instituts, 1899-1904, Vorwort.

*überlasse ich den bildenden Künstlern selbst*<sup>87</sup>. Schönheit und gleichzeitig wissenschaftliche Genauigkeit ist seiner Doppelbegabung als Künstler und Naturwissenschaftler geschuldet, zu der später auch eine einflussreiche philosophische Tätigkeit kam. Er hat immerhin bei seiner Italienreise damit geliebäugelt, Maler zu werden, hat sich aber nach Intervention seines Vaters und aus Verantwortung seiner Braut Anna Sethe gegenüber für eine wissenschaftliche Karriere entschieden<sup>88</sup>. Als glühender Anhänger von Alexander von Humboldt<sup>89</sup> und als überzeugter Darwinist<sup>90</sup> dienten diese ästhetischen Formen in einem ganzheitlichen Ansatz durchaus einem theoretisch fassbaren und klar formulierbaren Zweck. Das Naturverständnis von Humboldt hat ihn immer geleitet<sup>91</sup>. Er gilt als Wegbereiter der Neuroästhetik, die ästhetische Empfindungen auf neuronaler Basis erklärt<sup>92</sup>. Als früher Verfechter des Darwinismus hat das Lehrverbot für die Darwin'schen Thesen an Schulen in Preußen damals Haeckel regelrecht die Deutungshoheit über diese neue Theorie erlaubt. Er nutzte dies auch außerhalb der wissenschaftlichen Diskussion in populären Schriften. In manchen Ansichten und Formulierungen hat er allerdings auch polarisiert<sup>93</sup>. „*Der Mensch stammt vom Affen ab*“. Diese, wenn auch mindestens überpointierte, Aussage trug ihm den Namen „Affen-Professor von Jena“ ein<sup>94</sup>. Die Arbeiten zu den Radiolarien bildeten die Grundlage zu seiner „Generellen

---

87 ebenda

88 Carl Gottlob Haeckel an Ernst Haeckel, Ende 1859, zitiert nach Andrea Wolf, Alexander von Humboldt und die Erfindung der Natur S. 502, Anm. 32 in Kap. 22.

Bzw. Haeckel an Anna Sethe, 26. November 1859, ebenda.

89 Er hat Efeukränze um das Portrait Humboldts in seinem Zimmer gehängt. Haeckel an seine Eltern, 23. Mai 1853, in Entwicklungsgeschichte einer Jugend. Briefe an die Eltern, 1852-1856, Leipzig, K.F. Köhler, 1921, S. 54. (nach Andrea Wolf).

90 Haeckel an Darwin, 9. Juli 1864, in Darwin Briefe, Bd. 12, S. 482. (nach Andrea Wolf).

91 Zu Haeckel und Humboldt: siehe Andrea Wolf, Alexander von Humboldt und die Erfindung der Natur, S. 372 ff. Ernst Haeckel und Anna Sethe haben sich sogar an A. v. Humboldts Geburtstag am 14. September 1858 verlobt. Sie starb an seinem 30. Geburtstag, dem 16. Februar 1864. Er benannte eine Fahrenquale (Meduse) aus der Familie der Cyaneiden (Cyaneidae), *Desmonema Annasethe*, nach ihr.

92 Vergleiche dazu [http://wiki.bnv-bamberg.de/flg-wiki/index.php/Ernst\\_Haeckel\\_Naturwissenschaftler\\_Philosoph\\_und\\_Künstler#Ernst\\_Haeckels\\_Suche\\_nach\\_dem\\_i\\_dealen\\_Symmetriegesetz](http://wiki.bnv-bamberg.de/flg-wiki/index.php/Ernst_Haeckel_Naturwissenschaftler_Philosoph_und_Künstler#Ernst_Haeckels_Suche_nach_dem_i_dealen_Symmetriegesetz) (04.03.2017)

93 „In ... widerspruchsvoller Art leben zwei Wesen in Haeckel. Ein Mensch mit mildem, liebeerfülltem Natursinn, und dahinter etwas wie ein Schattenwesen mit unvollendet gedachten, engumgrenzten Ideen, die Fanatismus atmeten ... Ein Menschenrätsel, das man nur lieben konnte, wenn man es sah; über das man oft in Zorn geraten konnte, wenn es urteilte.“ (Rudolf Steiner: Mein Lebensgang, 1925, zitiert nach [freimaurer-wiki.de/index.php/Ernst\\_Haeckel](http://freimaurer-wiki.de/index.php/Ernst_Haeckel), 17.05.2017).

94 (Menschen und Affen haben gemeinsame Vorfahren.) Siehe z.B. [www.themen-der-zeit.de/content/Ernst\\_Haeckel\\_und\\_Rudolf\\_Steiner.2112.0.html](http://www.themen-der-zeit.de/content/Ernst_Haeckel_und_Rudolf_Steiner.2112.0.html) (17.05.2017)

Morphologie der Organismen“ von 1866. Sie entstand in Rekordzeit, offenbar als Reaktion auf den Tod seiner ersten Frau. Es war ein einziger großer Beleg für Darwins „Entstehung der Arten“, aber auch ein streitbares Werk gegen die Zweifler<sup>95</sup>. Inkl. des Menschen entwickelte er ausgefeilte mögliche Stammbäume aller Organismen. Das Symmetrieverständnis ist dabei sein grundlegender theoretischer Ansatz.

Die Evolution hat nach Haeckels Ansicht auf einfache „Baupläne“ primitiver Organismen zurückgegriffen und darauf aufbauend in immer größer werdender Komplexität der Symmetriebeziehungen die Biodiversität bis zum heutigen Tag entwickelt. Man kann sozusagen bei diesem holistischen Ansatz von „organischer Kristallographie“ (Breidbach, Vorwort zu den „Kunstformen“) sprechen. Vielfältige Formen entstanden somit, indem Symmetriebeziehungen dazu beigetragen haben, dass sich komplexe Muster in einem globalen Stammbaum ausdifferenzieren konnten<sup>96</sup>. Allerdings hatte Darwin noch eine gradualistische Grundhaltung – d.h. er hatte vor allem langfristige, kontinuierliche Entwicklungen im Blick. Der starke Druck der sexuellen Selektion wurde erst nach und nach erkannt.

Auch andere wesentliche Einflussfaktoren auf die Entwicklung der Arten, wie die Kontinentalverschiebung und Plattentektonik, wodurch räumlich getrennte Lebensbereiche entstanden oder abrupte und katastrophale Ereignisse, wie Meteoroiden-Einschläge<sup>97</sup> und Vulkanausbrüche, Klimaveränderungen u.v.m.

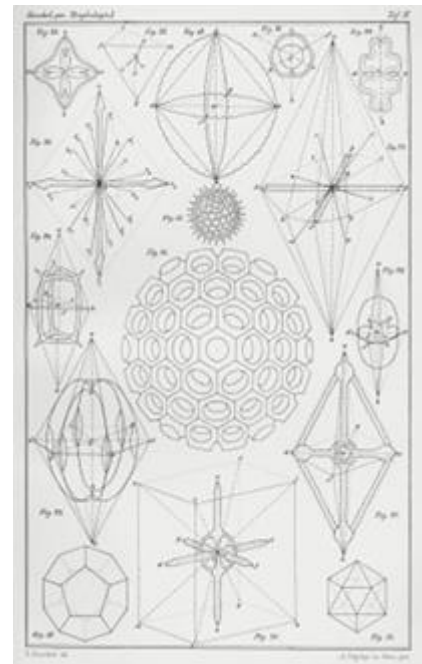


Abb. 31: Polyaxonie und homopole Grundformen.  
In : Ernst Haeckel,  
»Generelle Morphologie der Organismen.  
Allgemeine Grundzüge der Organischen Formen-  
Wissenschaft, mechanisch begründet durch die von  
Charles Darwin reformierte Descendenz-Theorie«.  
Erster Band : Allgemeine Anatomie der Organismen,  
Berlin, 1866.

95 Darwin nannte es die „prachtvollste Eulogie“ (Darwin an Haeckel, 18. August 1866, in Darwin Briefe, Bd. 14, S. 294, zitiert nach Wolf Andrea, S. 503, Anm. 61).

96 Siehe dazu auch das Vorwort von Olaf Breidbach; Die allerreizendsten Tierchen Haeckels Radiolarien-Atlas von 1862, in Ernst Haeckel, Kunstformen der Natur – Kunstformen aus dem Meer, PRESTEL München London New York, 2011. In diesem Vorwort wurde auch Abb. 31 inkl. Abbildungstext abgedruckt.

97 Als Beispiel wird meist der Chicxulub-Krater im heutigen Yucatan / Mexiko angeführt. Der Meteoroidenachweis und der Zusammenhang mit Artensterben war zweifellos ein Musterbeispiel internationaler und interdisziplinärer Zusammenarbeit. Der Einschlag führte zu einem Massensterben, insbesondere der Dinosaurier, vor 66

wurden bzw. konnten somit auch von Haeckel noch nicht gründlich mitbetrachtet werden. Erst recht hat die Genetik und DNA-Analyse ganz neue Perspektiven eröffnet, wenn es darum geht, Verwandtschaftsbeziehungen zu identifizieren und Entwicklungslinien abzugrenzen. Trotzdem ist es ein durchaus „moderner“ Ansatz, die Entwicklung von Formen als evolutionäre Richtschnur zu wählen. Denn die (funktionale und schöne)<sup>98</sup> Form bestimmt die Überlebens- und Fortpflanzungsfähigkeit des Individuums und der Art zumindest wesentlich mit. Evolution kommt somit ohne Betrachtung der Formtypen nicht aus und stößt damit automatisch auch auf die Symmetrie<sup>99</sup>. Symmetrie erlaubt, rein formal betrachtet, effizientere Codierung und Vererbung von Strukturen und kann damit auch Reduktion der Sprachmittel auf genetischer Ebene bedeuten. Effiziente DNA-Codierung unter Einbeziehung von Symmetrie könnte somit als „Blaupause“ für die sukzessive Entwicklung der „Baupläne“ im Haeckel'schen Sinne Vorteile haben. Symmetrieeffekte könnten somit auch wichtige Einflussfaktoren bei der Entwicklung des Lebens gewesen sein. Für Ernst Haeckel waren sie sogar wesentlicher Bestandteil für sein theoretisches Fundament:

*„Die Theorie bleibt für jede wahre Wissenschaft unentbehrlich, denn sie erklärt erst die Tatsachen durch Annahme von Ursachen. Wer auf die Theorie ganz verzichten und reine Wissenschaft bloß aus sicheren Tatsachen aufbauen will, der verzichtet damit auf die Erkenntnis der Ursachen überhaupt<sup>100</sup>.“*

---

Millionen Jahren. Die Earth Impact Database zeigt mit aktuell 190 nachgewiesenen Kratern, dass dies kein einmaliges Ereignis war.

[www.passc.net/EarthImpactDatabase/index.html](http://www.passc.net/EarthImpactDatabase/index.html) (08.02.2017). Der Begriff „Meteoroid“ folgt der neueren, international normierten Terminologie und ist noch nicht Bestandteil des Dudens (s.a. Lisa Randall, Dunkle Materie und Dinosaurier, S. Fischer, Frankfurt/M. 2016, S. 106 ff).

98 „Funktional“ steht hier für die notwendige Anpassung, „schön“ u.a. für die sexuelle Selektion. Bei der Symmetrie kann manchmal beides zusammenfallen, wenn z.B. symmetrische Muster „nützlich“ sind. Siehe dazu auch Anm. 86 mit Bezug auf Josef H. Reichholf, Der Ursprung der Schönheit, dtv, München 2013.

99 In seinem Buch „Geschichten vom Ursprung des Lebens – Eine Zeitreise auf Darwins Spuren“ entwickelte Richard Dawkins einen retrospektiven Ansatz unter Einbeziehung moderner Erkenntnisse aus der Genetik, wobei in Form von „Begegnungen“ sich jeweils ursprünglichere Äste am Stammbaum des Lebens entwickelt haben bzw. zu einer Aufspaltung geführt haben (Richard Dawkins, Geschichten vom Ursprung des Lebens, Ullstein, Berlin 2008).

100 Haeckel, Ernst; Die Welträthsels, 16. Kapitel, Wissen und Glaube, zitiert aus Ernst Haeckel: Gemeinverständliche Werke. Band 3, Leipzig und Berlin [o.J.], S. 302-317. Permalink: <http://www.zeno.org/nid/20009174974> (08.02.2017).



## Symmetrie und Erhaltungsgrößen

Der Symmetriebegriff in der Physik ist besonders abstrakt. Eine schöne Definition stammt von Prof. Mikko Laine (jetzt Univ. Bern): *„Die möglichen Symmetrien der Zustände werden dabei durch die Invarianzen der Naturgesetze bestimmt, ohne dass wir die genaue Form der letzteren kennen müssen. Dies macht die mathematische Behandlung von Symmetrien zu einem wichtigen Werkzeug für die Physik.“* (Zitatende)<sup>101</sup>. Dies ist eine gewaltige Anforderung an die mathematische Formulierung. Es bedeutet, dass jede plausible, zulässige Transformation, z.B. dass ein Naturgesetz unabhängig von austauschbaren Parametern gilt, die mathematische Formulierung invariant lässt. Dabei muss man zwischen kontinuierlichen und diskreten Vorgängen unterscheiden. Die klassische Physik beschreibt kontinuierliche Veränderungen, wie die Geschwindigkeit als infinitesimale Änderung des Ortes bei infinitesimaler Änderung der Zeit. Bei der Quantenphysik spielen diskrete Vorgänge eine Rolle. Einen fundamentalen Beitrag zur klassischen inkl. der relativistischen Physik lieferte die deutsch-jüdische Mathematikerin Emmy Noether<sup>102</sup>. Sie hatte erkannt, dass grundlegende, plausible Postulate zur geometrischen Natur von Raum und Zeit dazu dienen können, um insbesondere wichtige Erhaltungsgesetze mathematisch abzuleiten. Sie machte für ihren Beweis lediglich die Voraussetzung, dass die fundamentalen Naturgesetze zu jeder Zeit, an jedem Ort und in jeder Richtung überall gleich sind. Daraus leitete sie Energieerhaltung (symmetrisch bei Verschiebungen in der Zeit), Impulserhaltung (symmetrisch bei Verschiebungen im Raum) und Drehimpulserhaltung (symmetrisch bei Drehungen im Raum) ab. Symmetrie hat somit nicht nur eine Bedeutung bei räumlichen Strukturen, sondern impliziert aus den Naturgesetzen durch ihre Invarianz gegenüber Zeit, Ort und Richtung erst die wichtigen Erhaltungssätze, auf denen wesentliche Teile der Physik beruhen. Man spricht von Erhaltungsgrößen der Bewegung (im Gegensatz zu Stoffeigenschaften wie Masse oder Ladung). Der Begriff Symmetrie ist damit sehr abstrakt geworden. Noether legte die Lagrange-Funktion des mechanischen (also kontinuierlichen) Systems zugrunde, die von Zeit, Ort und Geschwindigkeit abhängt. Joseph-Louis Lagrange hatte sie Ende des 18. Jahrhunderts eingeführt und damit die mathematische Seite der Newton'schen Mechanik flexibler gemacht, weil sie jetzt invariant, also

---

101 Laine Mikko; Symmetrien in der Physik, Vorlesungsskript, Fakultät für Physik, Universität Bielefeld, 2005, S. 5.

102 Einstein 1935 in seinem Nachruf in der New York Times: „Fräulein Noether war das bedeutendste mathematische Talent [...] seit die höhere Ausbildung von Frauen begann.“ (zitiert nach [www.weltderphysik.de/gebiet/theorie/symmetrien/kontinuierliche-symmetrien-und-das-noether-theorem/](http://www.weltderphysik.de/gebiet/theorie/symmetrien/kontinuierliche-symmetrien-und-das-noether-theorem/), 07.12.2016)

unabhängig gegenüber Koordinatentransformationen, ist. Das ist das Symmetriekriterium schlechthin. Damit wird die Dynamik des Systems mit **einer** Gleichung beschrieben. Sie gilt somit im Gegensatz zur Newton'schen Beschreibung z.B. auch in beschleunigten Systemen. Newton ging (im Gegensatz zu Leibniz) von einem absoluten Raum und einer absoluten Zeit aus<sup>103</sup> – invariante, beschleunigte Systeme waren nicht beschreibbar. Die lokalen Transformationen heißen dann Symmetrien der Wirkung, wenn sich bei beliebig kleinen Transformationen die Lagrange-Funktion (für alle denkbaren Kurven) nur um die Ableitung nach der Zeit einer nur von Zeit und Ort abhängigen Funktion ändert. Nach diesem Prinzip hat Emmy Noether alle drei Erhaltungsgrößen abgeleitet und damit die Symmetrie bei kontinuierlichen Systemen bewiesen. Für die Übertragung auf die relativistische Physik benötigt man dann noch die Spezielle Relativitätstheorie<sup>104</sup>.

Im Bereich der Quantenphysik ist mit dem Standardmodell der Teilchenphysik ein in sich geschlossener, symmetrischer Komplex entstanden. Symmetrie heißt in diesem Zusammenhang, dass es eine Anzahl an Transformationen gibt, so dass der System bestimmende Operator („Rechenvorschrift“) invariant bleibt. Es ist die eigentliche mathematische Erhaltungsgröße. Diese Transformationen sind die Elemente der Gruppe; die Anzahl ist die Ordnung der Gruppe. Auch Energie, Spin, Ladung, Leptonenzahl, Baryonenzahl und einige mehr sind Erhaltungsgrößen in dem Sinne, dass in einer quantenmechanischen Reaktion links und rechts des Pfeils die gleichen Werte erhalten bleiben. Beispiel ist der Zerfall eines Neutrons (genauer eines d-Quarks in ein u-Quark, ein Elektron und ein Elektronantineutrino):

	D	→	u + e <sup>-</sup> + $\bar{\nu}_e$
Ladung	-1/3	→	2/3 + (-1) + 0
Baryonenzahl	1/3	→	1/3 + 0 + 0
Leptonenzahl	0	→	0 + 1 + (-1)
Spin	z.B. +1/2	→	+1/2 - 1/2 + 1/2

*Abb. 32: Erhaltungsgrößen beim  $\beta^-$ -Zerfall eines Neutrons sind z.B. Ladung, Leptonenzahl, Baryonenzahl oder Spin, aber natürlich auch die Energie.*

103 Obwohl er philosophisch unbefriedigende Konsequenzen erkannte, aber noch nicht auflösen konnte.

104 Hier spielt auch die Skalensymmetrie eine Rolle, auf die aber nicht näher eingegangen werden soll. Ein großer Forschungsbereich sind insbesondere nichtlineare Systeme in Verbindung mit Chaos und Fraktalen, in denen Skalensymmetrie über Selbstähnlichkeit auftritt; siehe auch Fazit.

Bevor näher auf das Standardmodell eingegangen wird, sollen einige Begriffe angesprochen werden, die für den Zusammenhang von quantentheoretischen Erhaltungsgrößen und Symmetrie wesentlich sind.

Den elementaren Begriff „Teilchen“ sollte man bei Verwendung immer hinterfragen. Das aus der Alltagserfahrung entstandene intuitive Verständnis von „Teilchen“ ist in der Regel bei Elementarteilchen falsch. In der Quantentheorie sind Teilchen jeder Größe zuerst Quantenfelder, die interferieren können. Sie werden durch Wellenfunktionen beschrieben, die tiefgreifenden Symmetrieanforderungen unterliegen. Die Quantentheorie beschreibt die entsprechenden Naturgesetze in der Quantenwelt. Erst durch Wechselwirkung mit dem Messsystem bzw. der Umgebung („Dekohärenz“) wird daraus ein Objekt der makroskopischen Welt, das mit den Methoden der klassischen Physik behandelt werden kann. Dieser Vorgang erfolgt sehr schnell, weshalb es so schwierig ist Quantencomputer zu bauen und wir „große“ Objekte als „real“ ansehen. Im Jahr 2000 hat Max Tegmark diesen Effekt im Detail an einem Beispiel ausgerechnet (feuern von Neuronen im Gehirn)<sup>105</sup> und kommt auf die Größenordnung von  $10^{-13}$ - $10^{-20}$  Sekunden. Das ist um Vieles schneller als der biologische, makroskopische Vorgang (Neuronen feuern 500-mal pro Sekunde, das entspricht ca.  $2 \times 10^{-4}$  oder 2 ms). Man kann dadurch definitiv ausschließen, dass das Gehirn bzw. Bewusstsein quantenmechanische Effekte nutzt<sup>106</sup>. Dieses Ergebnis ist verallgemeinerbar. Dekohärenz nennt man gerne auch „Messung durch die Umgebung“. Die Fähigkeit von Quantensystemen, Überlagerungen („Superpositionen“) zu bilden, die nicht-klassische Eigenschaften haben (z.B. an zwei verschiedenen Orten gleichzeitig zu sein), gehen verloren. Teilchen werden mit extremer Geschwindigkeit sofort „klassisch“; sind dadurch z.B. genau lokalisierbar. Zur Thematik Dekohärenz wurden zahlreiche Experimente von Anton Zeilinger und Mitarbeitern in Wien durchgeführt, um den zeitlichen Verlauf des „Weges“ von der Quantenwelt zur makroskopischen Welt besser aufzulösen<sup>107,108</sup>.

---

105 Max Tegmark, The importance of quantum decoherence in brain processes Phys.Rev.E61:4194-4206,2000, <https://arxiv.org/abs/quant-ph/9907009>

106 Diese Idee wurde Ende der 1980er Jahre von Sir Roger Penrose ins Spiel gebracht. Siehe Roger Penrose, Computerdenken, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg,1991. Original: The Emperor's New Mind: Concerning Computers, Minds and The Laws of Physics, Oxford Landmark Science, Erstveröffentlichung 1989.

107 S.a. Claus Kiefer, Der Quantenkosmos, S. Fischer, Frankfurt/Main, 2009, S. 107.

108 Ein Artikel als Beispiel zu den Experimenten mit Fullerenen ( $C_{60}$ ,  $C_{70}$ ) siehe "Decoherence of matter waves by thermal emission of radiation" von Klaus Hornberger, Lucia Hackermüller, Anton Zeilinger, Björn Brezger und Markus Arndt, in "Nature" (Bd. 427, S. 711, Ausgabe vom 19. Feb. 2004). Zur Grundidee der Dekohärenz siehe

<http://homepage.univie.ac.at/Franz.Embacher/Quantentheorie/Dekohaerenz/>

Teilchen in diesem nichtklassischen Sinne unterliegen den vier Naturkräften. Dabei kann man die Gravitation wegen ihrer Schwäche in dieser Größenordnung zunächst ausklammern, so dass elektromagnetische Kraft, starke Kernkraft und die schwache Wechselwirkung bleiben. Die elektromagnetische Kraft wirkt deshalb über beliebige Entfernungen, weil das Photon als Kraft vermittelndes Teilchen masselos ist. Globale Eichinvarianz gilt deshalb, weil die Phase einer Wellenfunktion wegen der Ortsunschärfe nicht messbar ist und sie deshalb beliebig umdefiniert werden kann. Erst in den bilateralen Wechselwirkungen der Elementarteilchen, also bei den lokalen Eichsymmetrien, treten Effekte zutage, die entscheiden, ob massive oder masselose Austauschteilchen zur Übertragung der Naturkräfte entstehen. Sie sind vom Typ „Boson“ und haben ganzzahligen Spin ( $-2, -1, 0, 1, 2$ ; näheres zum Spin s.u.). Bosonen sind allgemein Teilchen, die den gleichen Zustand einnehmen können (z.B. zusammengesetzte Teilchen bei suprafluidem Helium, Elementarteilchen bei Photonen beim Laser, etc.). Eichsymmetrie bedeutet im weitesten Sinne Invarianz gegenüber Maßstabsänderungen bei Ort und Zeit. Die mathematische Form der Gleichungen bleibt gleich, wenn bestimmte physikalisch relevante Transformationen durchgeführt werden („Lorentzsymmetrie“ bei verschiedenen Bezugssystemen unter Einbeziehung der Speziellen Relativitätstheorie) oder Eichtransformationen (Änderung ortsbezogener Variablen ohne Einfluss auf das Experiment). Beide Transformationen werden durch Lie-Gruppen beschrieben. Bekanntes klassisches Beispiel ist die Elektrodynamik mit der abelschen Eichgruppe  $U(1)$ <sup>109</sup> (Kreisgruppe). Man führt für das elektrische und magnetische Feld ein Potential ein, das durch Skalare mit frei wählbarer Skala beschrieben wird. Für richtungsabhängige Komponenten wird das Vektorpotential eingeführt. Dies erlaubt Eichfreiheiten, die sich nicht auf messbare Werte auswirken. In der Quantenfeldtheorie findet man oft als globale Eichsymmetrie  $U(1)$ . Die oben angesprochenen, von Emmy Noether erarbeiteten Sätze, liefern eine zu dieser Symmetrie zugehörige Erhaltungsgröße (z.B. der elektrischen Ladung). Physikalisch äußert sich Symmetrie oft in der Invarianz gegenüber Raumspiegelung (Erhaltung von Parität,  $P$ ), Invarianz bei Ladungsumkehr

---

<sup>109</sup>  $U(1)$  ist die sogenannte Kreisgruppe, also alle Drehungen um einen Punkt im 2-Dimensionalen. Man kann sie als Menge aller komplexen Zahlen verstehen, die den gleichen Betrag haben, also auf einem Kreis um den Ursprung liegen. Sie ist also über mehrere Wege definierbar (Winkel, Euler'sche Formel, Lie-Gruppe, unitäre Gruppe, etc.). Eine der möglichen korrekten Definitionen: „ $U(1)$  ist die unitäre Gruppe, deren Elemente komplexwertige quadratische Matrizen sind, deren Zeilen- und Spaltenvektoren orthonormal bzgl. des Standardskalarproduktes sind.“ Dadurch zeigen sich bei vielen Operationen große Regelmäßigkeiten und Invarianzen. Die ursprüngliche Formulierung der Quantenmechanik von Heisenberg und Born nutzt diese Mathematik intensiv.

(charge, C) und Invarianz gegenüber Zeitumkehr (time, T). Dies sind grundlegende Symmetrien mit weitreichender Bedeutung.

Paritätserhaltung bedeutet, dass ein zweites, gleichartiges Experiment bei einer Raumspiegelung am Ursprung unveränderte Ergebnisse bringt. Der Ursprung kann dabei willkürlich gewählt werden, d.h. ein Punkt mit den Koordinaten  $(t, x, y, z)$  geht durch eine „Paritätstransformation“ über in einen Punkt  $(t, -x, -y, -z)$ . Es entspricht im anschaulichen Beispiel der Diedergruppe  $D_4$  der Symmetrieoperation  $\sigma_3$ , also Spiegelung mit anschließender Drehung um  $180^\circ$ . Bei Gravitation und elektromagnetischer Kraft hat man keine Verletzung der Paritätserhaltung gefunden. Somit kann man die Parität als Erhaltungsgröße für die klassische Physik betrachten. In der Quantenmechanik ist es schwieriger, anschauliche Modelle für die Paritätstransformation zu finden. Ein Teilchen wird durch eine Wellenfunktion  $\psi$  mit komplexen Parametern beschrieben. Manipulationen von  $\psi$  werden durch Operatoren, also sozusagen Rechenvorschriften, vollzogen. Der Paritätsoperator  $\hat{P}$  hat im Erhaltungsfall einige besondere mathematische Eigenschaften. Einfach einzusehen ist die Tatsache, dass doppelte Spiegelung wieder die ursprüngliche Funktion ergibt ( $\hat{P}\hat{P}\psi=\psi$ ). Somit ist  $\hat{P}$  seine eigene Umkehrfunktion  $\hat{P}^{-1}$ , denn auf sich selbst angewendet ergibt sich die Identität. In der Gruppentheorie wird die Eigenschaft dann erfüllt, wenn ein Element, wie  $d_2$  (Drehung um  $180^\circ$ ) in der Diedergruppe, sein eigenes Inverses ist. Dies gilt auch für jede Spiegelung im Quadrat.

Der Operator darf nicht verzerren, ist also eine Längen- und Winkel erhaltende lineare Abbildung. Aus beiden Eigenschaften ergibt sich, vereinfacht formuliert, dass  $\hat{P}$  eine bijektive Abbildung (ein Isomorphismus) zwischen zwei mathematischen Strukturen ist, die wohldefinierte Längen- und Winkelmaße besitzen („unitärer bzw. hier wegen reeller Werte orthogonaler Operator mit Erhaltung des Skalarprodukts“). Eine weitere Eigenschaft („selbstadjungiert“), auf die hier nicht mathematisch eingegangen werden soll, verlangt eine Modifizierung des Symmetriebegriffs. Sie sorgt dafür, dass die Parität reell ist und nur die Werte  $+1$  und  $-1$  annehmen kann („Signum“). Analog wird der Begriff in der Mathematik für „gerade“ und „ungerade“ ganze Zahlen  $z$  verwendet, denn  $(-1)^z$  ist entweder  $+1$  oder  $-1$ . Auch diese Werte sind physikalisch einsichtig, da es bei Raumspiegelung nur zwei Zustände geben kann, wobei die „ $+1$ “ eine symmetrische Funktion ergibt (analog z.B. regelmäßiger Parabel), die „ $-1$ “ erzeugt eine „schiefe“ Symmetrie (daher ist Modifikation der Definition nötig). Man kann von den beiden Paritäts-Quantenzahlen sprechen. Diese mathematischen Eigenschaften, die einer einfachen, relativ anschaulichen Symmetrieoperation zugrunde liegen, haben dort erhebliche Auswirkungen, wo Wellenfunktionen Übergänge und Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen quantenmechanischen Zuständen

beschreiben. Das ist in der Atom-, Molekül- und Kernphysik sowie der Chemie der Fall.

Als Paul Dirac die spezielle Relativitätstheorie auf die Quantenmechanik anwandte, erhielt er für das Elektron vier Lösungen. Da das Elektron zwei verschiedene Spinzustände („Eigendrehimpuls“) annehmen kann, musste man sich fragen, was die anderen beiden Lösungen bedeuten. Mit der Entdeckung des Positrons als Antiteilchen des Elektrons (durch Anderson) wurde nach und nach deutlich, dass jeder Typ eines Elementarteilchens auch ein Antiteilchen hat. Neutrale *elementare* Teilchen sind dabei ihr eigenes Antiteilchen. Dabei ist die Unterscheidung „elementar“ wichtig, denn z.B. ein Anti-Neutron ist nicht identisch mit dem Neutron. (Vorgriff: Die Ladungsumkehr der Quarks führt zu einem anderen Teilchen). Das bedeutet aber nicht, dass es gleich viele Teilchen wie Antiteilchen im Universum gibt. Wir leben offenbar in einer materiedominierten Welt. Was das Ungleichgewicht hervorgerufen hat, spricht die Symmetriebrüche in der frühen Geschichte des Universums, wird noch zu thematisieren sein. Antiteilchen entstehen also formal durch Ladungsumkehr (C wie charge) und verhalten sich ansonsten physikalisch gleich zu den Teilchen (genügen der C-Symmetrie). Teilchen und Antiteilchen vernichten sich unter Freisetzung reiner Energie (Photonen). Innerhalb von Teilchen oder Antiteilchenprozessen bleibt die Ladung als positives oder negatives Vielfaches der Elementarladung eines Elektrons erhalten.

Die dritte wichtige Erhaltungsgröße ist die Invarianz gegenüber Zeitumkehr, auch als T-Symmetrie bezeichnet. Die meisten elementaren Prozesse sind entsprechend invariant. Mathematisch bedeutet es, dass ein plausibler Vorgang auch dann entsteht, wenn man das Vorzeichen der Zeit ändert, sie rückwärts laufen lässt. Erst auf makroskopischer Ebene, wenn die Entropie bzw. Dekohärenz ins Spiel kommt, entsteht der Zeitpfeil, macht die Unterscheidung zwischen Vergangenheit und Zukunft Sinn. Allerdings gibt es auch bei der T-Symmetrie erste subtile Experimente, die zeigen, dass „Uhren“ auf elementarer Ebene vorwärts anders gehen können als rückwärts<sup>110</sup>.

Bei allen drei Symmetrien wurden Verstöße gefunden (s.u.). Dies gilt auch für Kombinationen wie der CP-Symmetrie. Die einzige Symmetrie, die offenbar unangefochten gilt, ist die CPT-Symmetrie, also die Tatsache, dass ein Experiment, das gespiegelt unter Zeitumkehr und bei dem Teilchen durch Antiteilchen vertauscht werden, gleich abläuft.

---

110 Originalveröffentlichung:

J. P. Lees et al.: Observation of Time Reversal Violation in the  $B_0$  Meson System, Phys. Rev. Lett. 109, (2012); DOI: 10.1103/PhysRevLett.109.211801, siehe auch <http://www.pro-physik.de/details/news/3732621/>  
Zeitasymmetrie\_erstmals\_direkt\_nachgewiesen.html (07.04.2017)

Nach diesen Ausführungen soll auf das Standardmodell der Teilchenphysik näher eingegangen werden<sup>111</sup>. Es ist ebenfalls eine sogenannte Eichtheorie, in der die kraftvermittelten Bosonen Eichvariablen sind, die über Eichfelder wirken. Sie sind aber nicht nur mathematische Konstrukte, sondern es sind damit Elementarteilchen verbunden, die die Kräfte vermitteln (Photon, Gluonen,  $W^\pm$  - und Z-Boson sowie weitere wie das Higgs-Teilchen und das hypothetische Graviton). Das Higgs-Teilchen (Spin 0) hat Skalarcharacter, z.B. das Photon (Spin 1) hat Vektorcharacter (linear) und das vermutete Graviton (Spin 2) Tensorcharacter (multilinear).

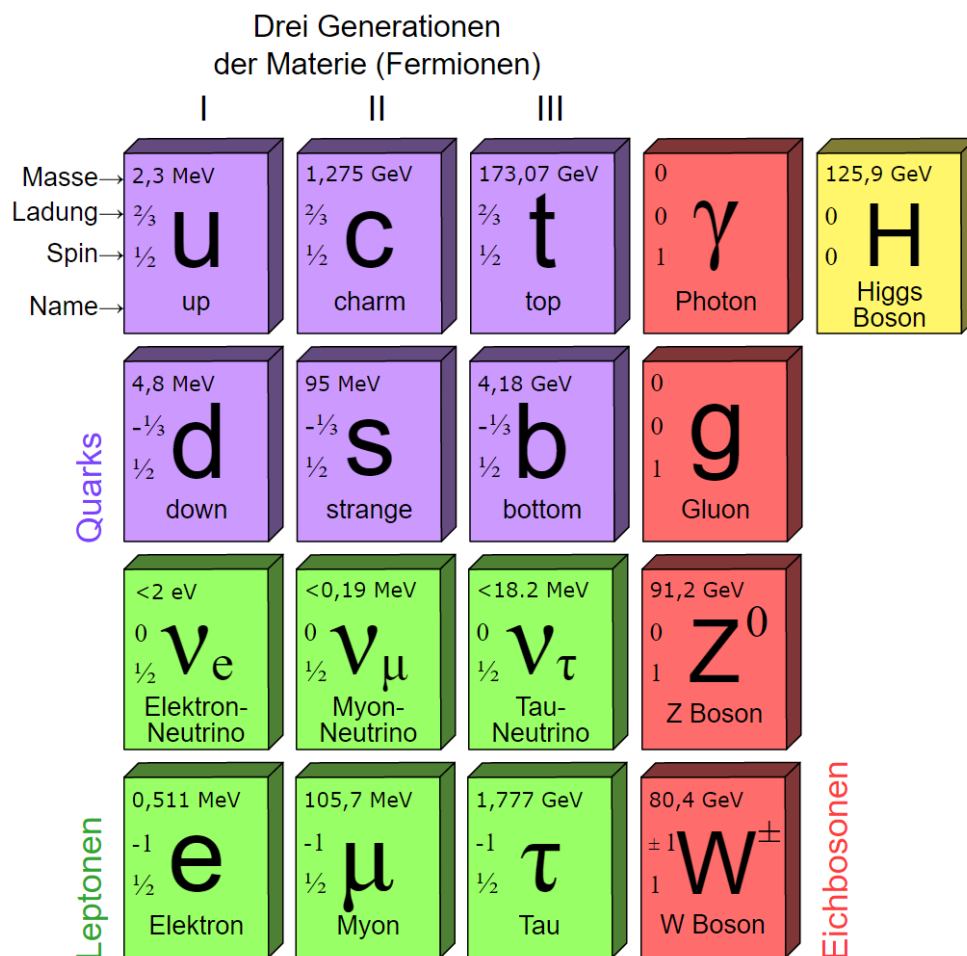


Abb. 33: Teilchen im Standardmodell (ohne Antiteilchen)

Die Symmetriebeziehungen beim Standardmodell sollen hier kurz dargestellt werden. Sie sind sehr gut experimentell belegt. Das Standardmodell unterscheidet zwischen Quarks und Leptonen. Die uns bekannte Materie enthält in den Atomkernen Quarks der Familie up (u) und down (d). Jedes

<sup>111</sup> Bildnachweis:

[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1c/Standard\\_Model\\_of\\_Elementary\\_Particles-de.svg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1c/Standard_Model_of_Elementary_Particles-de.svg) (08.04.2016)



Teilchen hat auch ein Antiteilchen ( $\bar{u}, \bar{d}$ ). Daneben gibt es zwei weitere Familien mit Quarks namens charm (c) und strange (s) sowie top (t) und bottom (b)<sup>112</sup> (sowie die jeweiligen Antiteilchen). c, s, b und t sowie  $\bar{c}, \bar{s}, \bar{b}$  und  $\bar{t}$  können nur in Teilchenbeschleunigern erzeugt werden. Die sechs Quarks unterliegen der starken Kernkraft (aber auch der schwachen Wechselwirkung, siehe Neutron-Zerfall), die nur in den Abständen wirkt, wie sie in Atomkernen anzutreffen ist. Immerhin ist ihre Reichweite um mehr als den Faktor 1.000 größer als die schwache Kraft. Die starke Kernkraft wirkt in Verbindung mit sogenannten Farbladungen, ein Begriff, der in Analogie zur Farbenlehre gewählt wurde, weil sich die Farbladungen rot, grün, blau nach außen kompensieren müssen („confinement Hypothese“). Antiquarks tragen die Farbladungen anti-rot, anti-grün und anti-blau. Außerdem ist die elektrische Ladung entweder  $-\frac{1}{3}$  (z.B. beim d-Quark) oder  $+\frac{2}{3}$  (z.B. beim u-Quark) und muss nach außen immer ganzzahlig, bezogen auf die Elementarladung, sein. Ein (einfach) positiv geladenes Proton trägt dementsprechend zwei u-Quarks und ein d-Quark; ein (neutrales) Neutron ein u-Quark und zwei d-Quarks<sup>113</sup>. Mathematisch wird die starke Kernkraft als Quantenchromodynamik in der Eichgruppe SU(3) beschrieben<sup>114</sup>. Die Symmetrie spiegelt sich noch in einer Reihe von Quantenzahlen wider, die z.T. spezifisch für das Teilchen sind. Quantenzahlen sind wohldefinierte Werte, die nicht der Unschärferelation unterliegen. Alle Quarks und alle Leptonen haben die Spinquantenzahl  $\frac{1}{2}$  und sind somit Fermionen<sup>115</sup>. Sie ergibt sich aus dem Faktor  $\frac{1}{2}$  im „Eigendrehimpuls“ multipliziert mit dem Planck'schen Wirkungsquantum durch  $2\pi$ ; formal:  $\frac{1}{2}\hbar = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2\pi}$ . ( $\hbar$  lässt man i.d.R. weg und sagt, der Spin sei  $\frac{1}{2}$ ). Fermionen „spüren“ Kräfte rein passiv. Das bedeutet, einfach formuliert, dass

---

112 Warum es genau drei Familien gibt ist noch unklar. Es wird spekuliert, dass es mit den drei Raumdimensionen zusammenhängen könnte.

113 Daneben gibt es noch kurzlebige Mesonen, die immer aus einem Quark und einem Anti-Quark bestehen (es muss nicht vom gleichen Typ sein).

114 SU steht für die Spezielle unitäre Gruppe, U für die Unitäre Gruppe. (Weitere Bezeichnungen: O für die Orthogonale Gruppe und SO für die Spezielle orthogonale Gruppe.) Die Gruppe kann aus 8 sog. spurlosen unitären 3x3 Matrizen gebildet werden. Meist nimmt man die Gell-Mann-Matrizen als erzeugende Elemente. Sie haben reelle Eigenwerte (hermitsch), sind spurlos (Summe der Hauptdiagonalwerte ist 0) und sind orthogonal bzgl. eines speziellen Skalarproduktes. SU(3) eignet sich sehr gut, um die Eigenschaften und Wechselwirkungen von Quarks mathematisch zu beschreiben. Auf Murray Gell-Mann geht übrigens die Bezeichnung „Quark“ nach einer Literaturstelle aus James Joyces „Finnegans Wake“ zurück.

115  $h$  steht für das sogenannte Planck'sche Wirkungsquantum ( $h=6,62606957 \cdot 10^{-34}$  Joulesekunden). Diese Naturkonstante impliziert, dass elektromagnetische Strahlung nicht beliebig teilbar ist, sondern in kleinsten Paketen, den Quanten, auftritt. Weil in Formeln zur Quantentheorie sehr oft  $h/2\pi$  auftritt, kürzt man dies gerne mit  $\hbar$  (gesprochen „h quer“) ab.

sie Kräften unterliegen, aber diese nicht übertragen. Das Gegenstück sind Bosonen, also (u.a.) die Vermittler der Grundkräfte<sup>116</sup>. Sie tragen, wie gesagt, eine ganzzahlige Spinquantenzahl. Sie war z.B. ein wichtiges Indiz, um das Higgs-Teilchen als Boson und Überträger der Kräfte des Higgs-Feldes identifizieren zu können (Spin 0, da skalar und Parität 1, s.u.). Die Bosonen Photon (Spin 1) und das vermutete Graviton (Spin 2) übertragen die beiden unendlich reichenden Kräfte elektromagnetische Kraft und Gravitation. Sie müssen deshalb masselos sein. Für die starke Kraft sind Gluonen (ebenfalls Spin 1) verantwortlich. Die aktuellen Messungen des LHC<sup>117</sup> am CERN haben erheblich zum Verständnis beigetragen. Dies gilt für Proton-Proton-Kollisionen und für Experimente mit Blei-Ionen, die ein Quark-Gluon-Plasma simulieren sollen. Gluonen tragen durch ihre Bindungsenergie erheblich zur Masse eines Atomkerns bei. Die schwache Wechselwirkung wird durch drei Austauschteilchen ebenfalls mit Spin 1 vermittelt. Das kommt daher, dass diese Kraft drei verschiedene Arten von Strömen beinhaltet:  $W^+$  und  $W^-$  vermitteln geladene Ströme zwischen (linkshändigen) Quarks oder zwischen (linkshändigen) Leptonen bzw. zwischen Anti-Quarks und Anti-Leptonen (rechtshändig). Das neutrale  $Z^0$ -Boson bewirkt Wechselwirkungen zwischen allen Quarks/Anti-Quarks bzw. Leptonen/Anti-Leptonen unabhängig von ihrer Händigkeit („Chiralität“).

Korrespondierend zu den sechs Quarks (plus sechs Antiquarks) gibt es sechs Leptonen (und ihre Antiteilchen). Neben dem altbekannten Elektron ( $e^-$ ) kennt man noch das Myon ( $\mu$ ) und das Tauon ( $\tau$ ). Sie „spüren“ die elektromagnetische Kraft. Dazu gehören drei Neutrinos  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  und  $\nu_\tau$ . Sie unterliegen der schwachen Kraft. Alle haben Masse, auch wenn man bei Neutrinos noch nicht weiß, warum, also unterliegen alle auch der Gravitation als vierter Kraft. Die Gravitation ist gegenüber allen drei anderen Grundkräften (inkl. der sogenannten „Schwachen Kraft“) allerdings verschwindend klein.

Bei Fermionen führt der Austausch eines Teilchens gegen ein gleichartiges zum gespiegelten Zustand, denn es gilt das sog. Pauli'sche

---

116 Genauer: Bosonen gehorchen nicht dem Pauli'schen Ausschließungsprinzip, d.h. sie können den gleichen Zustand einnehmen. Für die Symmetrie bedeutet das, dass bei Vertauschung einer der 3 Ortsvariablen bzw. der Spinvariablen die Wellenfunktion von Bosonen nicht das Vorzeichen wechseln; Fermionen dagegen schon (also insb. die Händigkeit/Chiralität wechseln, Boson:  $\Psi \rightarrow \Psi$ ; Fermion:  $\Psi \rightarrow -\Psi$ ). Die Bosonen, die Kräfte vermitteln, sind dabei nicht zusammengesetzte Teilchen. Ein Beispiel für ein zusammengesetztes Boson ist das  $^4\text{He}$ -Atom mit seinen suprafluiden Eigenschaften unterhalb des Lambdapunktes bei 2,1768 K.

117 LHC = Large Hadron Collider, der zurzeit leistungsstärkste Teilchenbeschleuniger am Europäischen Kernforschungszentrum CERN bei Genf. Zwei gegenläufige Strahlen mit Protonen kollidieren in den Detektorbereichen mit mittlerweile 2x6,5 TeV (Teraelektronenvolt).

Ausschließungsprinzip (s. Anm.<sup>118</sup>). So hat ein Elektron beim Wasserstoffatom im Grundzustand (1S-Orbital) z.B. linkshändigen Spin. Beim Wasserstoffmolekül muss das zweite, eigentlich gleichartige Elektron dann den rechtshändigen Spin annehmen. Die Fermionen müssen sich in mind. einer Quantenzahl / Variablen unterscheiden.

Im Jahr 2012 ist mit der Entdeckung des Higgs-Teilchens am Large Hadron Collider (LHC) des Europäischen Kernforschungszentrums CERN bei Genf ein wichtiger Schritt zur Vervollständigung des Modells getan worden, der überhaupt erst die prinzipielle Entstehung von Masse eines Teilchens erklären kann<sup>119</sup>. Man sollte jedoch bedenken, dass der Großteil der Masse aus Bindungsenergie im Kern stammt und nicht aus dem Higgs-Feld. Das Higgs-Teilchen war trotzdem sehr wichtig für den vorerst vollständigen experimentellen Nachweis des Standardmodells.

Elektroschwache Vereinigung:

Es ist zunächst schwer verständlich, dass sich elektromagnetische Kraft und schwache Kraft vereinigen lassen. Bei kleinen Energien, verglichen mit den Massen der Austauschteilchen (intermediäre Vektorbosonen,  $W^\pm$  und  $Z^0$  mit 80 bzw. 90 GeV), unterscheiden sie sich grundlegend. Die schwache Wechselwirkung fällt durch lange Lebensdauer ( $>10^{-13}$  s), kleine Wirkungsquerschnitte ( $\approx 10^{-43}$  s) und sehr kurze Reichweiten ( $\approx 10^{-18}$  m) auf. Strukturell ist die schwache Wechselwirkung besonders durch die großen Massen der Austauschteilchen deutlich verschieden von Interaktionen über Photonen. Die schwache Wechselwirkung kennt keine gebundenen Zustände. Sie ist fast eine eigene „Welt“ innerhalb der Atom- und Kernphysik, außerhalb der langjährigen Erfahrungen mit der elektromagnetischen Kraft. Sie ist Teil von möglichen Wechselwirkungen zwischen Quarks und Leptonen, ohne sie zu binden und gleichzeitig verantwortlich für ihren Zerfall. Die schwache Wechselwirkung wird in der Eichgruppe SU(2) beschrieben; elektromagnetische Kraft in der Eichgruppe U(1) mit dem Photon als Boson. Die Symmetrie U(1) wird lediglich bestimmt durch die Phasentransformation. Eine Vereinigung beider Kräfte bei hohen Energien muss in einer Symmetriegruppe SU(2)xU(1) erfolgen. Das ist auch mit Einschränkungen gelungen.

Um nun die Austauschteilchen in einer elektroschwachen Theorie zu identifizieren, muss man sich zunächst klarmachen, dass die schwache

---

118 Siehe dazu explizit Fußnote 116.

119 <http://journals.aps.org/prl/pdf/10.1103/PhysRevLett.13.508>, mittlerweile liegen erwartete Ergebnisse vor, dass das Higgs-Boson sowohl an (massive) Leptonen als auch an (massive) Quarks koppelt und ihnen somit Masse verleiht (<http://www.scinexx.de/wissen-aktuell-21676-2017-07-20.html>, 8.8.2017).

Wechselwirkung nur an linkshändige Teilchen (und rechtshändige Antiteilchen) koppelt. Rechtshändige Fermionen nehmen nicht an der Wechselwirkung teil. Man kann einen sog. Schwachen Isospin als neue Quantenzahl  $T$  definieren, der dieser Tatsache Rechnung trägt. Der mathematische Mechanismus ist ähnlich wie bei der Quantenchromodynamik mit dem Isospin. Er zeigt, dass aus  $W^+$ ,  $W^-$ ,  $Z^0$  und dem Photon  $\gamma$  in einer vereinigten Theorie die Austauscheteilchen  $W^+$ ,  $W^-$ ,  $W^0$  und  $B^0$  verlangt werden. Man kann salopp sagen, dass die Vereinigung beider Kräfte im Prinzip das Photon  $\gamma$  und das  $Z^0$  als Mischzustände aus  $B^0$  und  $W^0$  darstellt.

Ursprünglich wurde die elektroschwache Wechselwirkung von S. Glashow, A. Salam und S. Weinberg 1967 durch eine (nicht-abelsche) Eichtheorie erklärt, in der die Austauscheteilchen (also Eichbosonen) masselos sind. Das widerspricht aber der geringen Reichweite der schwachen Wechselwirkung und der Beobachtung, dass es massive  $W^\pm$  - und  $Z^0$ -Bosonen gibt. Der Symmetriebruch wurde durch Peter Higgs, Robert Brout, François Englert und anderen erklärt. Durch Postulierung eines zusätzlichen Skalarfeldes, des Higgs-Feldes, wird die Symmetrie gebrochen und die  $W^\pm$  - und  $Z$ -Bosonen erhalten, wie später 1983 am CERN beobachtet, Masse<sup>120</sup>. Damit wird die Symmetriebrechung nicht den Bosonen angelastet, sondern einer Eigenschaft des Raumes im Grundzustand, also des Vakuums. Das Massenverhältnis von  $W^\pm$  - und  $Z^0$ -Bosonen sagt der sogenannte Weinbergwinkel voraus,

$$\frac{m_W}{m_Z} = \cos \theta_W \approx 0,8768$$

Experimentell wurde etwa 0,882 gefunden.

*Zitat: Die Grundidee der elektroschwachen Vereinheitlichung ist, [dass] das Photon und das  $Z^0$  als zueinander orthogonale Linearkombinationen von  $B^0$  und  $W^0$  zu beschreiben. Die beiden neutralen Felder  $B^0$  und  $W^0$ , die an die gleichen Endzustände koppeln können, mischen zu den physikalisch beobachteten Feldern  $\gamma$  und  $Z^0$  mit den Weinberg-Mischungswinkel  $\theta_W$  der elektroschwachen Wechselwirkung<sup>121</sup>.*

**Diese Stelle markiert im Prinzip den Stand der heutigen experimentellen Forschung.**

---

<sup>120</sup> Wichtig war in der Theorie von Higgs und anderen Forschern auch, dass in ihren gruppentheoretischen Überlegungen das Photon masselos bleibt.

<sup>121</sup> [http://www-hera-b.desy.de/people/nedden/lectures/02\\_03/struma/struma2\\_kap11.pdf](http://www-hera-b.desy.de/people/nedden/lectures/02_03/struma/struma2_kap11.pdf)

An einer Vereinigung der elektroschwachen und starken Kernkraft wird noch gearbeitet. Meist werden die Ansätze unter dem Begriff „Grand Unified Theory“ (GUT) geführt. Im engeren Sinne der Symmetrie müssen die beiden Eichtheorien des Standardmodells in eine Eichgruppe zusammengeführt werden; also die Quantenchromodynamik mit der Eichgruppe  $SU(3)$  und der elektroschwachen Theorie mit  $SU(2) \times U(1)$ . Sie hat u.a. die Eigenschaft zu besitzen, dass die starke Kraft bei höheren Energien schwächer wird und die vereinigte elektroschwache Kraft stärker wird (Stichworte „asymptotische Freiheit“, „Energieabhängigkeit der starken Kopplungskonstanten  $\alpha_8$ “,  $\alpha_8$  steht für 8 verschiedene Gluonen). Die vielfach mit extremer Genauigkeit verifizierten einzelnen Theorien müssen sich als niederenergetische Grenzfälle der GUT ergeben. Experimentell wurde eine Reihe von Experimenten installiert, meist kilometertief, um Störereignisse zu minimieren. Sie sollen den Protonenzerfall untersuchen, der in vereinigten Theorien postuliert wird. Dieser ist noch nicht nachgewiesen worden. Die Energie, bei der die Vereinigung mindestens stattfinden kann, konnte aber mit  $10^{24}$  eV dadurch abgeschätzt werden. Die Halbwertszeit liegt mind. bei  $10^{32}$  Jahren. Der Fokus dieser Experimente liegt heute weitgehend auf der Neutrinoforschung; der Nachweis eines Protonenzerfalls ist aber nach wie vor ein Ziel dieser Anlagen<sup>122</sup>.

#### Supersymmetrie:

Ausgangspunkt für eine plausible, wenn auch spekulative Erweiterung namens Supersymmetrie ist die lange bekannte Poincaré-Gruppe. Ähnlich, wie die Euklidische Gruppe alle Kongruenzabbildungen im dreidimensionalen Raum enthält, gilt dies in der vierdimensionalen Raumzeit für die Poincaré-Gruppe. Die Poincaré-Gruppe hat sogenannte erzeugende Elemente (siehe Mathematik-Teil), also Gruppenelemente, die alle Elemente der Gruppe erzeugen können. Darüber hinaus ist es aber plausibel, dass Poincaré-Transformationen alle Erzeugenden von physikalisch relevanten Symmetrien invariant lassen sollten, auch wenn sie nichts mit der Raumzeit zu tun haben. Die Konsequenz bedeutet, dass die Poincaré-Gruppe erweitert werden kann durch sogenannte supersymmetrische Transformationen, die Fermionen und Bosonen ineinander umwandeln können. Die Situation erinnert an die Voraussage des Positrons, bei der auch eine plausible mathematische Lösung nicht einfach als physikalisch unsinnig zurück gewiesen werden konnte, sondern die Existenz eines neuen Teilchens nahelegte. Diese Supersymmetrie (SuSy) verdoppelt aber auf einen Schlag die Anzahl an

---

122 Literaturhinweise (vor allem aus Sicht der Neutrinoforschung): Heinrich Päs, Die perfekte Welle, Piper, München 2011; Frank Close, Neutrino, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg 2012.

Elementarteilchen, weil jedem heutigen Teilchen im Standardmodell ein supersymmetrisches Teilchen zugeordnet werden kann (Boson zu Fermion und umgekehrt). Insbesondere sollte das leichteste SuSy-Teilchen einigermaßen stabil sein und könnte ein Kandidat für die kalte, dunkle Materie (Cold Dark Matter, CDM) sein. Wichtigstes Argument für die SuSy wäre die Auflösung eines der größten existierenden Widersprüche in der modernen Physik. Die Energiedichte im feldfreien Raum wird durch SuSy endlich und erhält einen plausiblen Wert. Die Masse des korrespondierenden SuSy-Teilchens kann nicht gleich der Masse des Teilchens im Standardmodell sein, sonst hätte man diese Teilchen bereits gefunden. Sollten sie existieren, dann liegt auf jeden Fall ein Symmetriebruch vor. Aber auch bei den derzeit laufenden Experimenten am LHC mit 13 TeV sind bisher keine Indizien für Supersymmetrie gefunden worden.

### Spekulative Entwicklungen

Bestimmte Symmetriebetrachtungen wurden gerade in der Astronomie und der Kosmologie besonders interessant, weil hier extreme Phänomene zu erklären sind. Dass die Raumzeit in einem Schwarzen Loch eine Singularität bilden soll, also eine mathematische Unendlichkeit und ein physikalisch undefinierter Punkt, an dem alle Naturgesetze zusammen brechen, ist unbefriedigend. Erst recht herrschten in der Nähe des sogenannten Urknalls extreme Bedingungen, die unsere heutigen Theorien nicht mehr beschreiben können. Bereits die Spezielle Relativitätstheorie hat Inkonsistenzen bei der Umrechnung von (unbeschleunigten) Bezugssystemen vermieden. Die allgemeine Relativitätstheorie (ART) ist eine Theorie, die unabhängig von Bezugssystemen ist („Relativitätsprinzip“), schwere und träge Masse gleich behandelt („Starkes Äquivalenzprinzip“) und damit auch beschleunigte Bezugssysteme einbezieht<sup>123</sup>. Außerdem wird der Raum nicht mehr wie bei

---

123 Die Allgemeine Relativitätstheorie ist sehr komplex, aber das Prinzip kann man versuchen einfach zu erklären: Links stehen mit R Ausdrücke zur Krümmung des Raumes, g stellt den Bezug zur Metrik des Raumes her. Ergänzt wurde später die kosmologische Konstante  $\Lambda$  in Abhängigkeit zur Metrik. Rechts stehen alle Energieformen in Form des Energie-Impuls-Tensors  $T_{\mu\nu}$ .  $T_{\mu\nu}$  ist kein beliebiger symmetrischer Tensor 2. Ranges, sondern muss der Energie- und Impulserhaltung genügen

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

$R_{\mu\nu}$  und R charakterisieren die Krümmung des Raumes im Rahmen der Riemann'schen Geometrie.  $g_{\mu\nu}$  sorgt in dem Raum für eine Metrik, also für Abstände und Winkel, die allerdings nicht überall gleich, sondern ortsabhängig sind.  $T_{\mu\nu}$  steht für die Energie inkl. Materie und G ist die Newton'sche Gravitationskonstante, c die Lichtgeschwindigkeit,  $\pi$  die Kreiszahl. Die Indices  $\mu$  und  $\nu$  stehen paarweise für die 4

Newton als absolut angenommen. Hier war Einstein stark von Ernst Mach beeinflusst. Die ART ist hervorragend empirisch bestätigt; zuletzt wieder durch Messungen im Rahmen des im Gravitationsfeld verzögerten Funkverkehrs mit der Raumsonde Cassini („Shapiro-Effekt“). Trotzdem sind in den letzten Jahrzehnten alternative Gravitationstheorien entstanden. Irritierend war insbesondere auch die Entdeckung, dass sich Sterne weiter weg vom galaktischen Zentrum deutlich schneller bewegen, als es die Newton'sche Theorie und damit auch die ART vorhersagen. Das wird meist mit nicht-baryonischer kalter dunkler Materie erklärt (**Cold Dark Matter**), die nicht elektromagnetisch wechselwirkt, also aus bisher unbekannten Elementarteilchen besteht. Der Punkt wurde bei der Supersymmetrie angesprochen. Das kosmologische Standardmodell bezieht zudem die sog. kosmologische Konstante  $\Lambda$  (Lambda) mit ein, die die Energie des Raumes repräsentiert<sup>124</sup>. Das gängige Modell heißt deshalb  $\Lambda$ CDM.

Die Phänomene können aber bedingt auch durch Abänderung der etablierten physikalischen Gesetze erklärt werden. Eine radikale Variante, die Modifizierte Newton'sche Dynamik (MOND), stellt die Existenz von Dunkler Materie infrage und postuliert, dass die Kepler'schen Gesetze und die Newton'sche Gravitationstheorie für sehr geringe Beschleunigungen nicht exakt gelten<sup>125</sup>.

---

Raumzeitkoordinaten 0,1,2,3. Ihre 16 Paare definieren ein Gleichungssystem mit 16 Gleichungen. Die Tensoren sind symmetrisch, d.h. dass z.B.  $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$  gilt. Das bedeutet, dass nur 10 Gleichungen wegen Symmetrien voneinander unabhängig sind. Raumzeit wird so zu Materie und Energie in eine geometrische Beziehung gesetzt. So konnte John Wheeler formulieren: „*Die Materie sagt der Raumzeit, wie sie sich zu krümmen hat, und die Raumzeit sagt der Materie, wie sie sich bewegen muss.*“ Zitiert nach Dieter Bedenig, Physikalische Weltbilder, Weissenstein Verlag, August 2011, S.152. Die mathematische Darstellung folgt einer Vereinfachung aus Carlo Rovelli, Die Wirklichkeit, die nicht so ist, wie sie scheint. Rowohlt, Reinbek bei Hamburg, 2016, S.102

124 Der Zusammenhang liegt nahe, ist aber noch nicht bewiesen.

125 Im Gegensatz zu vielen anderen neuen Modellen mutet die Mathematik bei MOND erstaunlich einfach an: Es wird eine neue Naturkonstante  $a_0$  mit der Dimension einer Beschleunigung eingeführt. Sie führt zu einem Bewegungsgesetz der Form  $\frac{GM}{r^2} = \frac{a^2}{a_0}$ . (G=Gravitationskonstante, M=Masse, a=Beschleunigung, r=Abstand des Sterns z.B. vom galaktischen Zentrum). Die Rotationsgeschwindigkeit  $v = (GMa_0)^{\frac{1}{4}}$  hängt nicht mehr von r ab. Mit  $a_0 \approx 10^{-10} \frac{m}{s^2}$  ist  $a_0$  viel zu klein, als dass es messbare Effekte bei der Rotationsgeschwindigkeit der äußeren Planeten geben könnte. Allerdings könnte die Masse des Gravitons nicht mehr zu Null angenommen werden müssen. Die jüngsten Beobachtungen von Gravitationswellen haben für die Gravitonmasse eine obere Grenze von  $1,2 \cdot 10^{-22} \text{ eV}/c^2$  ergeben. Das entspricht einer unteren Schranke für die Compton-Wellenlänge des Gravitons von  $\lambda_g > 10^{13} \text{ km}$  (B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration): Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. In: Physical



MOND kann die Rotationskurven von Galaxien erstaunlich gut interpretieren, aber viele Wissenschaftler sträuben sich, deshalb Jahrhunderte alte Gesetze infrage zu stellen; Symmetriemaspekte bleiben bei MOND unberücksichtigt.

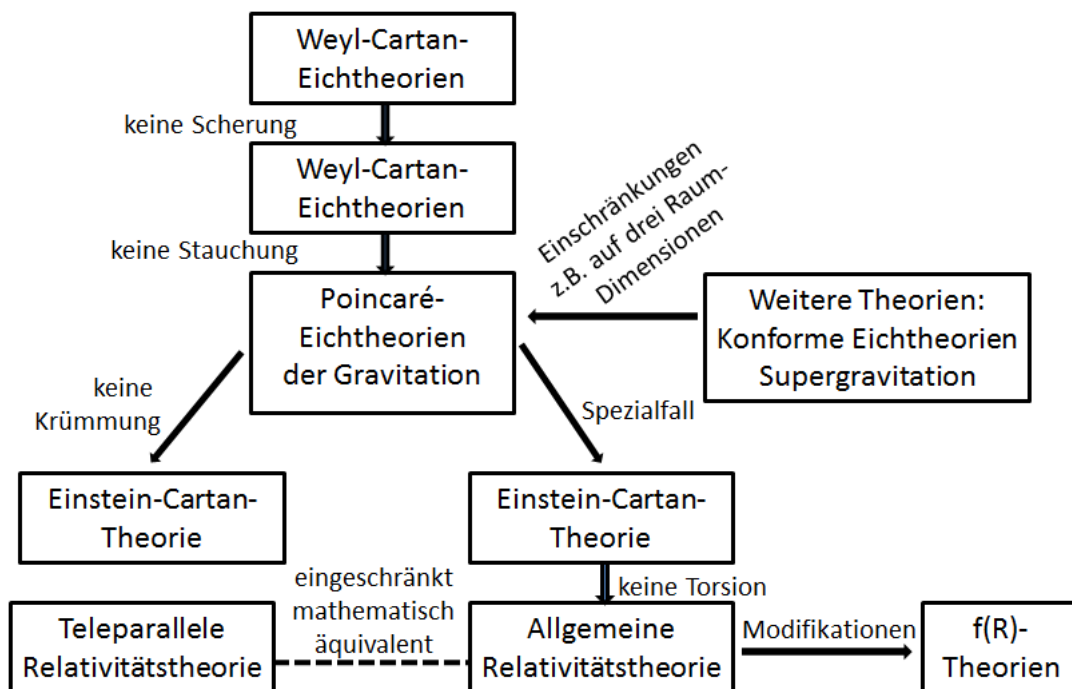


Abb. 34: Zur Illustration von erweiterten Anforderungen an Gravitationstheorien sei auf die Grafik von Rüdiger Vaas verwiesen<sup>126</sup>. Auf jeden Fall ergeben sich bei steigender Hierarchiestufe immer größere Anforderungen an die Symmetrie, um die Invarianz von Erhaltungsgrößen zu gewährleisten. Die ART lässt sich also in übergeordnete Geometrien einbetten.

Noch radikaler ist ein Ansatz des Niederländers Erik Verlinde<sup>127</sup>. Er wurde Anfang November 2016 publiziert und hat schon in der Vorabveröffentlichung für theoretische Furore und Überprüfung anhand von Beobachtungsdaten gesorgt. Streng genommen wird die Gravitation als 4. Grundkraft in dieser Theorie obsolet, weil sie durch quantenmechanische Effekte zwischen Raum und Materie erklärt wird. Die Theorie integriert eine Vielzahl an neuen Konzepten in Kosmologie und Astrophysik, wie die Quanteninformationstheorie, die Thermodynamik Schwarzer Löcher oder die Idee

Review Letters. 116, Nr. 6, 2016. arxiv:1602.03837. bibcode:2016PhRvL.116f1102A. doi:10.1103/PhysRevLett.116.061102).

126 Vaas, Rüdiger: Jenseits von Einsteins Universum. Franckh- Kosmos Verlag 2015, S. 397 zit. nach M. Blagojević, F. W. Hehl (Hrsg.): Gauge Theories of Gravitation. Imperial College Press 2013. In freundlicher Abstimmung mit dem Franck-Kosmos Verlag wurde die Grafik 1:1 vom Autor umgesetzt (Bildzitat).

127 Verlinde, E.P.: Emergent Gravity and the Dark Universe. arXiv, 1611.02269, 2016. S.a. Spektrum der Wissenschaft, 5/17, S. 56 ff.

eines holographischen Prinzips, also der äquivalenten Beschreibung eines Raumzeit-Gebietes durch Eigenschaften seiner Oberfläche (Reduktion um eine Dimension). Sie knüpft an Verlindes Konzept der „entropischen Gravitation“ an, das von der Stringtheorie inspiriert ist und ebenfalls die Gravitation nicht über das Austauscheteilchen Graviton erklärt. Sie wird als emergentes, also aus sich selbst ergebendes Zusammenspiel von mikroskopischen Freiheitsgraden gesehen.

Obwohl nicht zuerst publiziert, hat die Brans-Dicke-Theorie einen gewissen Einfluss gewonnen<sup>128</sup>. Ihre Grundhypothese ist, dass die Newton'sche Gravitationskonstante  $G$  eben keine Konstante ist (genauer: dass das „Starke Äquivalenzprinzip“ nicht gilt). Die Symmetrieanforderungen komplizieren sich dadurch enorm. Die Theorie führt einen zusätzlichen Parameter  $\omega$  ein, der im Nenner der (gegenüber ART) zusätzlichen Terme auftritt und die Theorie in die ART überführt, wenn  $\omega$  gegen unendlich geht. Nach heutigem Stand ist  $\omega$  schon größer 40.000<sup>129</sup>. Interessant ist die Tatsache, dass der niederenergetische Grenzfall bei der String-Theorie eher zu einer Theorie vom Brans-Dicke-Typ, als zur ART führt.

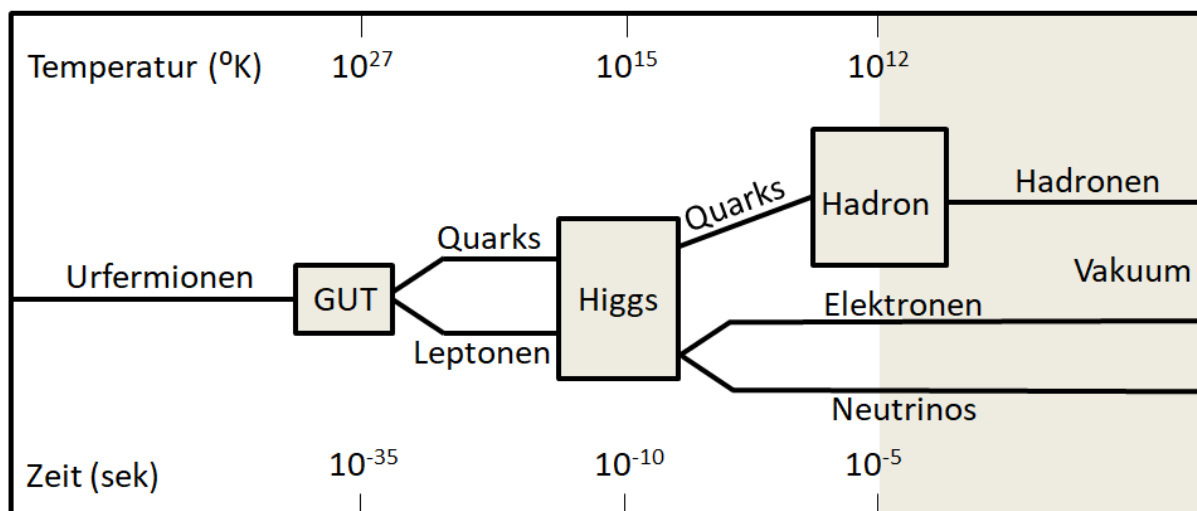


Abb. 35: Die Übergänge durch Symmetriebrechung im frühen Universum und ihre Auswirkungen auf **Materieteilchen**<sup>130</sup>.

Einstein war selbst der Auffassung, dass die ART irgendwann durch eine übergeordnete Theorie ersetzt werden muss, für die wiederum die ART ein Grenzfall ist. Einsteins Arbeit in späteren Lebensjahren an einer

128 Siehe z.B. [https://en.wikipedia.org/wiki/Brans-Dicke\\_theory](https://en.wikipedia.org/wiki/Brans-Dicke_theory) (29.03.2017).

129 Vaas, Rüdiger: Jenseits von Einsteins Universum, Kosmos, Stuttgart 2015, S. 413f.

130 Nach Helmut Satz, Kosmische Dämmerung, C.H.Beck, München 2016, S. 87. Nachdruck mit freundlicher Genehmigung des C.H.Beck Verlages.

Vereinheitlichten Feldtheorie, die Gravitation und Elektromagnetismus in einer Theorie beschrieben sollten, werden oft als Fehlschlag bezeichnet. Natürlich hat er sein selbst gestecktes Ziel nicht erreicht. Er hat aber durchaus nach einigen Sackgassen verstanden, welche Symmetrieanforderungen für erweiterte Theorien erforderlich sind. Mit der Einstein-Cartan-Theorie wurde ein erster Schritt gemacht. Abb. 34 zeigt, dass weitere Schritte folgten.

Doch mit einer verbesserten Beschreibung der Gravitation, ohne dass die Quantentheorie einbezogen wird, ist es nicht getan.

Man vermutet in unmittelbarer zeitlicher Nähe zum Urknall einen spontanen Symmetriebruch der vier Grundkräfte – insbesondere möglicherweise zuerst der Abspaltung der Gravitation von den noch kurzzeitig vereinigten drei, zu diesem Zeitpunkt gleich starken anderen Kräften.

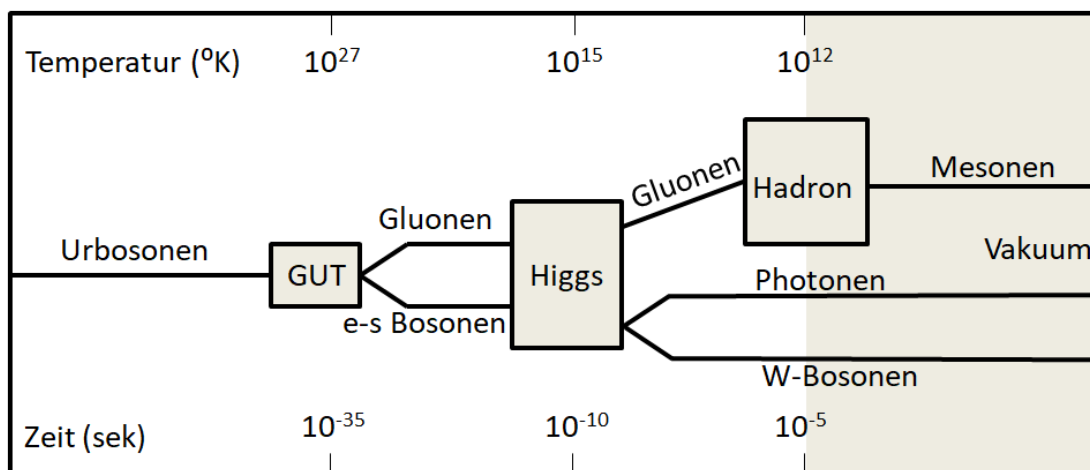


Abb. 36: Die Übergänge durch Symmetriebrechung im frühen Universum und ihre Auswirkungen auf **Kraftteilchen**<sup>131</sup>.

Sie liegen vor allem und zuerst in der Phase vor dem sogenannten GUT-Übergang, in der starke Kernkraft, die schwache Kernkraft und die elektromagnetische Kraft wahrscheinlich vereinigt waren. GUT steht hier, wie oben bereits thematisiert, für **Grand Unified Theory**, die diese Vereinigung der drei Kräfte zukünftig beschreiben muss. Dies ist ein Zustand deutlich höherer Symmetrie und es gibt eindeutige experimentelle Belege aus Teilchenbeschleunigern, dass dies bei etwa  $2 \cdot 10^{16}$  GeV der Fall ist. Diese Phase ist eng verbunden mit der kosmischen Inflation. Die Modelle wurden in den letzten Jahrzehnten, manche sagen willkürlich<sup>132</sup>, modifiziert, aber die

131 Nach Helmut Satz, Kosmische Dämmerung, C.H.Beck, München 2016, S. 88. Nachdruck mit freundlicher Genehmigung des C.H.Beck Verlages.

132 Siehe Anna Ijjas, Paul J. Steinhardt, Abraham Loeb; Inflationsmodell in der Kritik, Spektrum der Wissenschaft 6.2017, S. 12 f.

meisten Physiker sind grundsätzlich davon überzeugt, dass zwischen  $10^{-35}$  s und maximal  $10^{-30}$  s nach dem Urknall sich das Universum inflationär ausgedehnt hat<sup>133</sup>. Diese Inflationsphase muss, bei allen guten Argumenten, trotzdem genauer hinterfragt werden. Die sehr genauen Daten über die Verteilung und Temperaturschwankungen der kosmischen Hintergrundstrahlung durch den Planck-Satelliten verlangen neue Modelle. Inflationäre, abstoßend wirkende Energie bleibt auf jeden Fall eine Hypothese ohne gänzlich überzeugende experimentelle Belege. Jenseits dieser Grenze von etwa  $10^{-35}$  s beginnt auf jeden Fall erst recht die Spekulation.

Die drei Kräfte waren „anfangs“ nicht unterscheidbar, d.h. erst nach dieser Phase (dem GUT-Übergang als Symmetriebruch) haben sich die vereinigte elektroschwache Kraft (mit der Symmetriegruppe  $SU(2) \times U(1)$ ) und die starke Kernkraft (genauer Quantenchromodynamik, nicht-abelsche Symmetriegruppe  $SU(3)$ ) getrennt. Die Grafiken Abb. 35 und 36 zeigen weiterhin, dass damit nicht nur unterschiedliche Materieteilchen bildeten, sondern auch Kraft vermittelnde Teilchen entstanden, die entweder masselos oder unterschiedlich massebehaftet sein konnten. Es ist das Forschungsfeld der relativistischen Quantenfeldtheorie. Hier sagt ein Theorem („Goldstone-Theorem“), wenn die Symmetrie spontan bricht, die Existenz masseloser Teilchen voraus (Photon bei elektromagnetischer Kraft, das vermutete Graviton bei der Gravitation).

Starke Wechselwirkung	Elektrostatik	Magnetostatik	Schwache Wechselwirkung	Gravitation
	Elektromagnetische Wechselwirkung			
Quanten-chromodynamik	Quantenelektrodynamik			Allgemeine Relativitätstheorie
	Elektroschwache Wechselwirkung			Quanten-gravitation
Standardmodell				
Große vereinheitlichte Theorie (GUT)				
„Weltformel“, Theory of Everything (ToE)				

*Abb. 37: Historische und mögliche zukünftige Entwicklung unseres Verständnisses über die vier Naturkräfte. Quantengravitation, Große vereinheitlichte Theorie (GUT) und die sogenannte Weltformel oder Theory of Everything sind in Entwicklung und spekulativ.*

<sup>133</sup> Manche Autoren sprechen von  $10^{-36}$  bis  $10^{-34}$  s (z.B. Claus Kiefer).

Umgekehrt „vermeidet“ der Higgs-Mechanismus<sup>134</sup> masselose Teilchen und verleiht den Eichbosonen der starken Kernkraft (Gluonen) und der schwachen Kraft ( $W^+$  und  $W^-$  sowie dem Z-Boson) Masse. Das spielt sich in den ersten Momenten ab, in denen das Universum in dieser kurzen Zeit um den Faktor  $10^{26}$  gewachsen ist und damit seine bis heute erhaltene flache Geometrie erhalten hat.

Die theoretischen Physiker haben eine Reihe von Theorien entwickelt, die die Symmetrie der vier Grundkräfte unmittelbar nach dem Ursprung von Raum, Materie und Zeit und in ihrer weiteren Entwicklung beschreiben sollen<sup>135</sup>. Diese Forschung geht unvermindert weiter. Die Quantengravitation versucht dabei die Quantentheorie auf die Gravitation anzuwenden. Die Schleifen-Quantengravitation<sup>136</sup> postuliert dabei, dass die Raumzeit kein beliebig teilbares Kontinuum darstellt, sondern eine kleinste, nicht weiter teilbare Entität besitzt. Raumvolumina oder Oberflächen hätten somit eine gewisse Körnigkeit im Bereich der Planck-Länge<sup>137</sup>. Es bilden sich durch den gewählten mathematischen Ansatz diskrete, nicht weiter teilbare Strukturen<sup>138</sup>. Es gibt keine kleinere Oberfläche als  $8\pi L_P^2$ , also etwa  $10^{-66} \text{ m}^2$ . Der Ansatz ist wohlbegründet und soll mittlerweile von Näherungslösungen befreit sein. Er entsteht dadurch, dass Diracs Gleichungen auf die Allgemeine Relativitätstheorie angewendet werden. Es sind erste Hinweise auf die Möglichkeit experimenteller Überprüfung veröffentlicht worden<sup>139</sup>.

---

134 P. W. Higgs, "Broken Symmetries, Massless Particles and Gauge Fields," Physics Letters, Vol. 12, No. 2, 1964, pp. 132-133.

135 Bildnachweis: erstellt nach einer Grafik unter [https://de.wikipedia.org/wiki/Große\\_vereinheitlichte\\_Theorie](https://de.wikipedia.org/wiki/Große_vereinheitlichte_Theorie)

136 Alternativer Begriff: kanonische Quantengravitation

137 Die Planck-Zeit ist die Zeitdauer, die das Licht benötigt um die Planck-Länge zu durchlaufen. Die Planck-Länge  $L_P$ , Planck-Zeit  $T_P$  und Planck-Masse  $M_P$  kombinieren die 3 Universalkonstanten, die für Gravitation (Newtons Gravitationskonstante  $G$ ), Relativität (Lichtgeschwindigkeit  $c$ ) und Quantentheorie (Planck'sches Wirkungsquantum  $\hbar=h/2\pi$ ) stehen und sind somit ideale Maßeinheiten:

$$L_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1,62 \cdot 10^{-35} \text{ m.}$$

$$T_P = \frac{L_P}{c} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 5,40 \cdot 10^{-44} \text{ s.}$$

$$M_P = \frac{\hbar}{L_P c} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 2,17 \cdot 10^{-8} \text{ kg.}$$

138 Informationen dazu siehe z.B. Carlo Rovelli, Die Wirklichkeit, die nicht so ist, wie sie scheint. Rowohlt, Reinbek bei Hamburg, 2016, S. 179ff.

139 Siehe Abhay Ashtekar, Ivan Agullo, William Nelson, The pre-inflationary dynamics of loop quantum cosmology: Confronting quantum gravity with observations, submitted 01. Feb 2013 (v1), last revised 08. Apr 2013 (v2), <https://arxiv.org/abs/1302.0254> (28.02.2017).

Mathematisch schön und physikalisch vielversprechend schien lange Zeit die Stringtheorie zu sein, in die bei weitem die meisten personellen Ressourcen in diesem Bereich der mathematischen Physik der letzten Jahrzehnte gegangen sind. Sie geht davon aus, dass auch scheinbar punktförmige Teilchen eine Dimension größer Null haben (z.B. schwingende Saiten, strings). Entscheidend ist jedoch der Unterschied, dass erstmals nicht nur eine Quantisierung der Gravitation angestrebt wird, sondern aller Grundkräfte in einer „Theory of Everything“. Man will ebenfalls physikalisch unsinnige unendliche Ausdrücke vermeiden, aber die damit verbundene Mathematik ist extrem schwierig. Die Tatsache, dass mit Edward Witten 1990 erstmals ein Physiker die Fields-Medaille<sup>140</sup> bekommen hat, zeigt, wie mathematisch anspruchsvoll die theoretische Physik in diesem Bereich geworden ist (Wittens Arbeitsgebiete: allgemeine Relativitätstheorie, Supersymmetrie, topologische Quantenfeld-Theorien).

Leider sind experimentell überprüfbare Voraussagen zur Verifizierung der Theorie kaum zu verzeichnen. Was bleibt sind immer bessere Belege für das Standardmodell der Elementarteilchen. Die Experimente am LHC, bald bis hin zu 14 TeV, können das eine oder andere weitergehende Modell mangels Ergebnissen in bestimmten Energiebereichen ausschließen. Insbesondere konnten bisher keine supersymmetrischen Teilchen gefunden werden, die die Stringtheorie fordert und deren stabilster Vertreter ein Kandidat für die Dunkle Materie wäre. Das gibt z.B. den Verfechtern der Schleifen-Quantengravitation Auftrieb. Solche negativen Ergebnisse sind aber eher frustrierend. Dabei gibt es durchaus Hinweise auf eine Physik jenseits des Standardmodells. Z.B. hat man in den Daten des LHCb-Detektors Abweichungen gefunden. So sollten beim Zerfall von B-Mesonen genauso viele Elektronen wie Myonen entstehen. Der Detektor fand jedoch eine möglicherweise signifikante Unregelmäßigkeit. Der aktuelle Wiederanlauf des LHC soll hier möglichst Klarheit verschaffen<sup>141</sup>. Die Stringtheorie ist nur in einem 10-, 11- (oder 26-dimensionalen) Raum konsistent. Das ist aber nicht das einzige Problem. Ausgerechnet die Stringtheorie und ihre Weiterentwicklung zur M-Theorie, auf die aus mathematischen Gründen große Hoffnungen gesetzt werden und an der sehr viele Forscher arbeiten, bewegt sich in scheinbar experimentell unerreichbaren Größenordnungen im Bereich der Planck-Länge  $L_P$  von  $10^{-35}$  m. Planck-Länge und Planck-Zeit ( $10^{-44}$  s) stellen gewisse prinzipielle Grenzen dar, weil dort hypothetische Strukturen, wie die Strings, aufgrund der Heisenberg'schen Unschärferelation zu Schwarzen Löchern kollabieren müssten bzw. müssen. Sie eignen sich deshalb auch als Einheiten. Zum

---

140 Die Fields-Medaille wird gerne als Nobel-Preis für Mathematik bezeichnet; wird aber nur alle vier Jahre an maximal vier Forscher unter 40 Jahren vergeben.

141 Informationsquelle <http://www.lhc-facts.ch/index.php?page=news2017> (3.6.2017)



Vergleich: Die „Auflösung“ des LHC liegt für die geplanten 14 TeV Kollisionen bei  $10^{-19}$  m, das entspricht dem Zehnmillionstel eines Billionstelometers und liegt immer noch 16 Größenordnungen über der Planck-Länge. In kaum absehbarer Zeit wird jedes Labor der Welt Teilchen dieser Planck-Größenordnung als punktförmig betrachten und damit eventuell vorhandene Substrukturen nicht identifizieren können. Zudem ist es noch offen, wie die bestehenden zeitabhängigen Theorien inkl. der klassischen Physik als Grenzfälle hervorgehen sollen, denn der Zeitparameter ist als isolierte Größe durch die Quantelung der Raumzeit praktisch „verloren gegangen“. Beiden Theorien sind gemeinsam, dass sie von einer fest vorgegebenen Raumzeit wegkommen wollen. Beide Theorien wollen sozusagen ohne starren Hintergrund auskommen. Im Bereich der derzeit erreichbaren Energien von aktuell 13 TeV hat man jedoch andererseits Erkenntnisse gewonnen, die hin zu höheren Energien in Teilchenkollisionen extrapolierbar sind. Dies betrifft die Vereinigung der Grundkräfte und ihre mögliche mathematische Beschreibung. In der 4-dimensionalen Raumzeit der ART sind 3 Variablen plus Zeit notwendig; in der Stringtheorie mind. 10 variable Größen. Man vergleicht diese 10 Variablen gerne mit für alle Kräfte gleichartigen Billardbanden, an denen die Bewegung eines Teilchens „abprallt“. Hier kommt mit der unendlich dimensional Gruppe  $E(10)$ , „10“ steht für die minimale Variablenanzahl, eine mathematische Gruppenstruktur ins Spiel, die überraschend gut auf die extrapolierte Physik der Hochenergiekollisionen passt<sup>142</sup> und deutlich höhere Symmetrie besitzt. Offen ist noch die bereits im mathematischen Teil angesprochene Frage, ob  $E(10)$  überhaupt eine plausible Raumzeit liefern kann. Man hofft, dass die Quantengravitation bzw. sogar die Stringtheorie in einem unendlich dimensional  $E(10)$ -Raum beschrieben werden kann. Doch auch elementarere Fragen sind offen: Warum gibt es drei makroskopisch erlebbare Raumdimensionen? Warum gibt es drei Familien von Elementarteilchen im Standardmodell? Warum enthält das Standardmodell drei Grundkräfte, die mit den unitären Gruppen  $U(1)$ ,  $SU(2)$  und  $SU(3)$

---

142 Siehe ein Übersichtsbeitrag der Max-Planck-Gesellschaft von 2006: <https://www.mpg.de/324293/forschungsSchwerpunkt1> mit einigen Hinweisen auf Originalveröffentlichungen im Anhang (28.04.2017). Es handelt sich um eine sogenannte Kac-Moody-Lie-Algebra, an der vor allem zwei grundsätzliche Fragestellungen mathematisch untersucht werden: 1) Inwieweit bleibt die  $E(10)$ -Symmetrie erhalten, wenn man sich zeitlich weiter weg vom Urknall bewegt. 2) Welche Rolle haben die Fermionen im  $E(10)$ -Modell bzw. wie verhält es sich mit der Supersymmetrie. Die Materie ist aus Fermionen aufgebaut; die Kräfte werden durch Bosonen vermittelt. Die Supersymmetrie weist jedem Fermion ein Boson zu und umgekehrt und ist ein wesentlicher Bestandteil der String-Theorie. Erneut auch an dieser Stelle den Hinweis auf die kürzlich gelungene mathematische Konstruktion von Zukunft und Vergangenheit auf dieser Basis unter: <https://arxiv.org/abs/1702.08426> (28.04.2017).

beschrieben werden können? Warum gibt es drei verschiedene Spins elementarer Teilchen: 0,  $\frac{1}{2}$  und 1?<sup>143</sup>

Ein weitergehendes Verständnis der vier Grundkräfte kann nur mit mathematischen und physikalischen Symmetriebetrachtungen erreicht werden, weil vielfach bewährte, aber isolierte Theorien, darin als Spezialfälle enthalten sein müssen. Es stellt sich die Frage, ob die jetzigen großen Modelle noch etwas weitergeführt werden sollten. Wir müssen zumindest wissen, ob mathematisch aus den jetzigen Ansätzen die etablierten Theorien als Grenzwert entstehen können und konsistent bleiben. Das sind insbesondere Allgemeine Relativitätstheorie, Quantentheorie und das Standardmodell der Elementarteilchen; für die Stringtheorie kommt noch elektroschwache und Kernkraft dazu. Es ist zurzeit die größte Herausforderung, weil besonders beide herausragenden Theorien des 20. Jahrhunderts sich konzeptionell widersprechen. Dies gilt insbesondere für den Zeitbegriff. Hier verwendet die Quantentheorie im Prinzip noch die absolute Zeit Newtons. Gravitation als stetige geometrische Eigenschaft des Raumes und die Forderung nach Quantisierung der Raumzeit sind ebenfalls scheinbar inkonsistente mathematische Forderungen an eine gemeinsame, übergeordnete Theorie. Schuld ist auch die Tatsache, dass ein beliebig teilbares Kontinuum, z.B. des Raumes, immer zu unendlichen Werten führt. In früheren Theorien (z.B. der Quantenelektrodynamik oder der Quantenchromodynamik) konnten diese unendlichen Werte durch einen (eigentlich mathematisch unzulässigen) Trick beseitigt werden („Renormierbarkeit“): Man „kürzte“ unendliche Werte weg. Das scheint bei der Quantengravitation nicht zu funktionieren und die Stringtheorie wird noch grundsätzlicher. Nur wenn es eine nicht weiter teilbare Untergrenze gibt, der Raum als granular, also aus diskreten Teilen bestehend, behandelt wird oder Teilchen als nicht mehr punktförmig angesehen werden, können unendliche Werte vermieden werden<sup>144</sup>. Sollte diese Vereinigung gelingen, kommt spätestens dann die Physik zum Tragen, d.h. die Frage an die Natur, ob sie sich gemäß der dann hoffentlich als mathematisch konsistent erwiesenen neuen Theorie verhält.

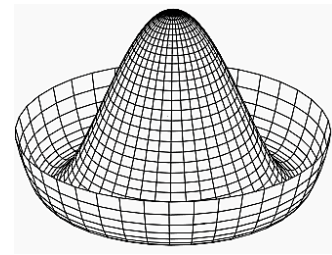
---

143 Siehe z.B. Jakob Schwichtenberg; Durch Symmetrie die moderne Physik verstehen, Springer Spektrum, Berlin 2017, S.3. Das Graviton als Austauschteilchen der Gravitationskraft ist hypothetisch. Es gibt aber gute theoretische Gründe, dass es, wenn es existiert, den Spin 2 haben sollte. Das Gravitationsfeld sollte über einen symmetrischen Tensor 2. Stufe, als Energie-Impuls-Tensor, beschrieben werden und das kraftvermittelnde Teilchen somit den Spin 2 besitzen (siehe auch die Passage zur ART). Beim Elektromagnetismus ist es ein Vektor und somit hat das Photon den Spin 1.

144 Es ist philosophisch interessant, dass hier die Atomtheorie des griechischen Philosophen Demokrit sogar bis in den Raum hinein, sozusagen bis zu den „atomaren Raumteilchen“, wirkt.

Die moderne Kosmologie hat zweifellos viele faszinierende Ideen hervorgebracht und noch mehr wichtige Fragen gestellt. Einige dieser Ideen haben bereits heute in manchen Bereichen die Mathematik wesentlich befruchtet und sind faszinierende Theoriegebäude geworden. Aber noch ist nicht klar, inwieweit diese Ideen mit der Realität etwas zu tun haben<sup>145</sup>.

Die dabei entstehenden und schon entstandenen Modelle müssen in nicht zu ferner Zukunft experimentell überprüfbare Voraussagen machen. Der Bereich des experimentell Möglichen und der Bereich des experimentell Machbaren sollte möglichst nahe beieinander liegen. Sie müssen mittelfristig zeigen, dass sie Teil einer Naturwissenschaft sind und nicht nur Teil der Mathematik. Dabei wird man höchstwahrscheinlich immer auch Symmetriebetrachtungen im mathematischen Sinne und im physikalischen Sinne als Invarianz physikalischer Gesetze unter Symmetrietransformationen mit einbeziehen müssen.



*Abb. 38: Eine Kugel auf der Spitze des „Sombreros“ besitzt maximale Symmetrieeigenschaften. Rollt sie in beliebiger Richtung herunter, so entspricht dies einer spontanen Symmetriebrechung, wobei potentielle Energie frei wird.*

### Symmetriebrüche

Am Schluss soll noch auf nichtspekulative Phänomene hingewiesen werden, die, obwohl meist sehr subtile Ausnahmen von den physikalischen Gesetzen, entscheidend für unsere Welt sind. Sie sind aber auch beim Thema Symmetrie und Erhaltungsgrößen relevant, z.B. wenn die wichtige Frage auftaucht, wieso wir in einer materiedominierten Welt leben, in der Antimaterie nur in winzigen Mengen existiert. Gemeint sind Symmetriebrüche, die besonders bei der C-, P- und T-Symmetrie solche grundsätzlichen Fragen berühren.

Symmetriebrechung ist seit langem bei Systemen bekannt, die einen Phasenübergang durchlaufen. So kann um mehrere Grade unterkühltes flüssiges Wasser bei kleinsten Erschütterungen plötzlich gefrieren. Die hohe Symmetrie der flüssigen Phase, in der keine Raumrichtung ausgezeichnet ist, reduziert sich auf die restriktive Gittersymmetrie des Eiskristalls. Ein weiterer Phasenübergang spielt sich bei Ferromagneten bei der Curie-Temperatur ab.

---

<sup>145</sup> Umgekehrt ist es problematisch das Vorhandensein von Realität, wie wir sie beobachten, damit zu begründen, dass es sonst keine Beobachter gäbe, wenn die Realität anders wäre. Dieses Argument ist als anthropisches Prinzip bekannt. Es ist legitim, dies zu konstatieren. Aber beim Zusammenspiel von theoretischem Modell und experimentellen Indizien reicht die bloße Existenz von Beobachtern als naturwissenschaftlich fundiertes Indiz noch nicht aus.

Oberhalb dieser Temperatur ist das Material drehsymmetrisch; die Spins sind isotrop verteilt. Eine Magnetisierung unter spontaner Festlegung der Polrichtung erfolgt unterhalb dieser Temperaturgrenze. Sie liegt bei Cobalt am höchsten (1121 °C), bei Eisen bei 768 °C, bei Nickel bei knapp der Hälfte (360 °C) und bei Gadolinium schon bei Zimmertemperatur<sup>146</sup>. In beiden Fällen bewirkt die niedrigere Temperatur ein Übergang zu weniger Ordnung im Sinne von weniger Freiheitsgraden. Gruppentheoretisch wird die volle Rotationssymmetrie (der orthogonalen Gruppe  $O(3)$ ) auf die Untergruppe der Drehungen um eine ausgezeichnete Achse ( $O(2)$ ) reduziert. Kristallisieren ist dabei ein (unstetiger) Phasenübergang 1. Ordnung (es wird Kristallisationswärme frei bzw. umgekehrt muss Energie nur zum Schmelzvorgang und nicht gleich zur Temperaturerhöhung zugeführt werden). Magnetisierung ist ein kontinuierlicher Phasenübergang 2. Ordnung, denn das Maß an Magnetisierung geht beim Erhitzen stetig gegen Null.

Symmetriebrechung kann bei einem Quantensystem mit nur endlich vielen Freiheitsgraden nicht spontan sein. Es gibt keine Symmetrie, die den Grundzustand in einen anderen Zustand mit gleichem Energieniveau überführen kann<sup>147</sup>. Erst bei unendlich vielen Freiheitsgraden, z.B. bei der quantenmechanischen Behandlung von Problemstellungen aus der Festkörperphysik, gibt es Szenarien mit spontaner Symmetriebrechung<sup>148</sup>. Ein eklatantes Beispiel von Symmetriebrechung äußert sich in einer Paritätsverletzung bei der schwachen Wechselwirkung. Es ist ein sehr subtiler Effekt. Die psychologische Bedeutung dieser Entdeckung war jedoch enorm und ist bei näherer Betrachtung geradezu verstörend für den sogenannten „gesunden Menschenverstand“. Sie bedeutet, dass es Prozesse gibt, die „im Spiegel beobachtet“ anders ablaufen als in einem spiegelbildlich angeordneten Quantenexperiment. In der makroskopischen Welt wäre das ein Widerspruch in sich. Spiegelsymmetrie ist sicher eine elementare Basis für das menschliche Symmetrieverständnis in unseren gewohnten makroskopischen Dimensionen.

Die Physiker waren schockiert, als bei einem Experiment mit radioaktivem Cobalt-60, bei dem Nickel-60, ein Elektron und ein Elektron-Antineutrino

---

146 [de.wikipedia.org/wiki/Curie-Temperatur](https://de.wikipedia.org/wiki/Curie-Temperatur), 05.12.2016

147 Die Schrödinger-Gleichung ist im Prinzip in diesem Sinne eindeutig bis auf die komplementären Äquivalenzen wie Orts- und Impulszusammenhang, die sich auch in der berühmten Heisenberg'schen Unschärferelation wiederfinden. Fasst man Materie als Welle auf, so lässt sich z.B. Ort und Impuls jeweils nicht beliebig genau messen. Ist die Ortsunschärfe  $\Delta x$  und die Impulsunschärfe  $\Delta p$ , so ist  $\Delta x \cdot \Delta p \sim h$ , (also proportional zur Planck-Konstante, meist schreibt man:  $\Delta x \cdot \Delta p \gtrsim h$ ). Dagegen unterliegen Elementarladung oder Spin („Drehimpuls“ bei Elementarteilchen) nicht der Unschärferelation und konnten mit großer Genauigkeit gemessen werden.

148 Bildnachweis: [de.wikipedia.org/wiki/Spontane\\_Symmetriebrechung](https://de.wikipedia.org/wiki/Spontane_Symmetriebrechung) (01.02.2017)

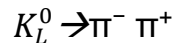
entstehen, eine 100%-ige Paritätsverletzung (der Punktsymmetrie am Ursprung) auftrat<sup>149</sup>. Es erschien als selbstverständlich, dass es immer einen Punkt als Symmetriezentrum geben müsste, so dass das so gespiegelte Experiment gleichartig ablaufen muss. Dies war unzweifelhaft bei diesem Vorgang nicht der Fall.



Eine Verletzung der Paritätserhaltung hätte niemand für möglich gehalten, ist aber ein weiteres Beispiel für Quantenverhalten, das unserem Alltagsempfinden empfindlich widersprechen kann.

Als unumstößlich galt die Symmetrie gegenüber Spiegelung (P wie Parität) und Vertauschen von Materie gegen Antimaterie (C wie Charge also Ladungskonjugation). Außerdem existiert dort, wo noch keine Entropie-Effekte herrschen, auch eine Symmetrie gegenüber der Zeitumkehr T (T wie time).

Man vermutete deshalb zunächst, dass wenigstens die Kombination aus C und P, also die anschließende Vertauschung von Teilchen und Antiteilchen, eine absolut gültige Erhaltungsgröße sei. Doch acht Jahre später fand man auch dabei eine Symmetriebrechung, allerdings nur im winzigen Zweipromillebereich, wenn neutrale Kaonen (K-Mesonen) in zwei Pionen ( $\pi$ -Mesonen) zerfallen.



Beide Phänomene sind theoretisch noch nicht restlos geklärt, aber experimentell unstrittig. Schon Andrej Sacharow leitete daraus ab, dass das offenbare Übergewicht von Materie zu Antimaterie im Universum durch die CP-Verletzung erklärt werden kann. Allerdings ist der neutrale Kaonenzerfall, noch nicht geeignet, dieses starke Übergewicht von Materie zu erklären.

Schon etwas anders sieht es bei sogenannten B-Mesonen aus. Die vier B-Mesonen-Typen enthalten das beauty-Quark oder Antiquark - entweder zusammen oder in Verbindung mit stabilen u- oder d-Quarks bzw. Antiquarks. Für den Zerfall des beauty-Quarks wurde das LHCb-Experiment am LHC im CERN konzipiert. Das „b“ steht für „beauty“. Der Detektor ist ein sogenanntes Vorwärtsspektrometer und wird nahe am Strahl platziert. Bei B-Mesonen wurde die CP-Verletzung bereits nachgewiesen. Erst Anfang des Jahres wurde aber am CERN durch die LHCb-Arbeitsgruppe berichtet, dass es starke Anzeichen gibt, dass auch bei Baryonen mit beauty-Quark, also Bindungszuständen von drei Quarks, eine lang gesuchte CP-Verletzung

---

149 Das Experiment der chinesisch-amerikanischen Physikerin Chien-Shiung Wu in Zusammenarbeit mit der Tieftemperaturgruppe des National Bureau of Standards ist sehr gut in [de.wikipedia.org/wiki/Wu-Experiment](https://de.wikipedia.org/wiki/Wu-Experiment) beschrieben (07.12.2016).

auftreten kann<sup>150</sup>. Dies wurde beim  $\Lambda_B^0$ -Teilchen und seinem Antiteilchen beobachtet. Als gesicherte Entdeckung gilt ein Sigma-Wert von 5; das entspricht einer Fehlerwahrscheinlichkeit von 1 zu 1.744.278 oder 0,000 057 3303%. Die ursprünglich untersuchten 6.000 plus 1.000 weiteren Fälle waren noch nicht für eine unzweifelhafte Entdeckung ausreichend, aber mittlerweile ist Sigma 5 erreicht. Das  $\Lambda_B^0$ -Teilchen besteht aus einem up-, einem down- und einem beauty-Quark (auch bottom-Quark genannt) und zerfällt in einem sehr seltenen Prozess in ein Proton und 3 geladene Pionen bzw. Kaonen ( $\Lambda_B^0 \rightarrow p\pi^-\pi^+\pi^-$  bzw.  $\Lambda_B^0 \rightarrow p\pi^-K^+K^-$ ). Man fand teilweise eine über 20%-ige Verletzung der CP-Symmetrie in Form unterschiedlicher Winkel, in denen die Zerfallsprodukte von Teilchen und Antiteilchen auseinander schossen. Es ist die erste CP-Verletzung, die man bei Baryonen gefunden hat. Sie hat zwar die gleiche physikalische Ursache, nämlich die Schwache Kraft, wie der Zerfall von B-Mesonen. Kaonen bzw. D- oder B-Mesonen können aber oszillieren d.h. ineinander übergehen. Deshalb ist die Beobachtung beim Baryon aufgrund der anderen Bindungsverhältnisse ein eigenständiges Phänomen. Die Analyse beruht übrigens noch auf den älteren Daten als der LHC erst ca. die halbe Leistungskraft (7 TeV) erreicht hatte.

Keine Verletzung fand man bisher bei der CPT-Symmetrie, also der gleichzeitigen Vertauschung von Ladung, Parität und Zeitumkehr, wenn die Theorie bestimmte Voraussetzungen erfüllt<sup>151,152</sup>. Die Symmetrien C, P und T

---

150 Siehe z.B. [www.weltmaschine.de/news/30012017](http://www.weltmaschine.de/news/30012017) (17.02.2017) oder [lhcb-public.web.cern.ch/lhcb-public/Welcome.html#BaryonCP](http://lhcb-public.web.cern.ch/lhcb-public/Welcome.html#BaryonCP) (17.02.2017)  
Ausführlich siehe auch „New source of asymmetry between matter and antimatter“ by Stephanie Pandolfi, Originalpublikation unter [www.nature.com/nphys/journal/vaop/ncurrent/full/nphys4021.html](http://www.nature.com/nphys/journal/vaop/ncurrent/full/nphys4021.html) (17.02.2017)  
Originalmeldung: <http://home.cern/about/updates/2017/04/lhcb-finds-new-hints-possible-standard-model-deviations> (18.4.2017).

Der LHCb-Detektor, dem die Entdeckung zu verdanken ist, wurde für diese Untersuchungen speziell konzipiert. Er hat die Abmessungen 21 x 13 x 10 m und ein Gewicht von 5600 Tonnen. Weit über 1.000 Forscher arbeiten an Betrieb, Optimierung und Datenauswertung. Das LHCb-Experiment konzentriert sich auf die Frage, warum wir in einem materiedominierten Universum leben und hat damit ein zentrales Bauziel erreicht (siehe LHCb-Webseite unter <http://lhcb-public.web.cern.ch/lhcb-public/>). Weitere Entdeckung des LHCb Anfang 07/2017: Baryon erstmals mit 2 schweren Quarks (2 charm, 1 up-Quark, 2-fach positiv, Name  $\Xi_{cc}^{++}$ ,  $\Xi_{cc}^{++}$ ); press.cern/sites/press.web.cern.ch/files/file/press/2017/07/lhcb\_paper\_2017.07.06.pdf.  
Ein weiterer, erst kürzlich von der T2K-Kooperation des Super-Kamiokande-Experiments bekannt gegebener, starker Hinweis könnte im unterschiedlichen Umwandlungsverhalten von Neutrinos und Antineutrinos liegen. Siehe <https://naturwissenschaften.ch/topics/particlephysics/92546-moegliche-erklaerung-fuer-die-dominanz-der-materie-ueber-antimaterie-im-universum> bzw. <https://www.t2k.org/docs/talk/282/kekseminar20170804> (17.08.2017).

151 Wolfgang Pauli leitete ab, dass es keine CPT-Verletzung geben kann, wenn die Theorie u.a. folg. Voraussetzungen erfüllt: Invarianz gegenüber bestimmten Lorentz-

bleiben bei starker Kraft, elektromagnetischer Kraft und Gravitation erhalten. Nur in der schwachen Wechselwirkung sind C und P offenkundig und seit langem bekannt einzeln verletzt, wie das Beispiel Neutrino in Abb. 39 zeigt.

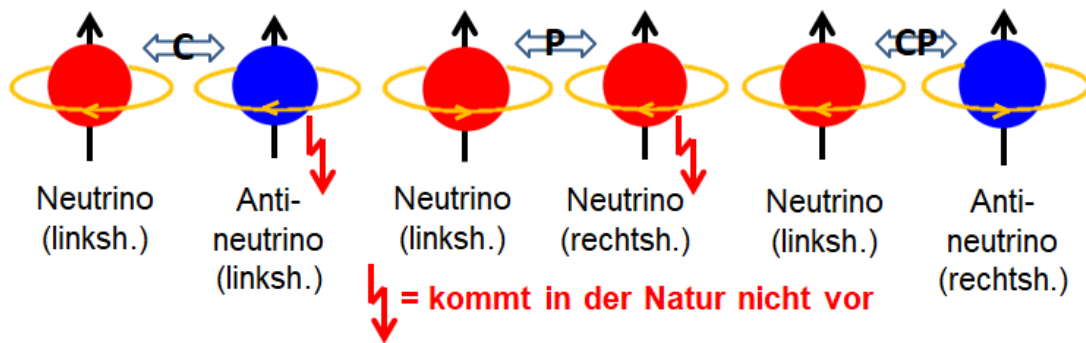


Abb. 39: Verdeutlichung der physikalisch unmöglichen Ladungsumkehr C (linkshändig zu linkshändig) und der Parität P (linkshändig zu rechtshändig). Erst beide zusammen als CP-Symmetrie ergeben ein in der Natur vorkommendes, rechtshändiges Antineutrino-Teilchen.

Neutrinos kommen in der Natur nur linkshändig vor, denn ihr Spin („Eigendrehimpuls“) ist immer antiparallel zur Bewegungsrichtung („Impulsrichtung“). Antineutrinos dagegen sind immer rechtshändig. Die CP-Symmetrie gilt in den überwiegenden Fällen zu 100%. Lediglich der Kaonen-Zerfall ist bisher ein bestätigtes Gegenbeispiel (99,8 %) mit weitreichenden Konsequenzen für unser Symmetrieverständnis und wahrscheinlich auch für unsere Existenz, denn wir leben offenbar in einem von Materie dominierten Universum und nicht in einem von Antimaterie dominierten. Da das Beauty-Quark kurz nach dem Urknall kurzzeitig gebildet wurde (Masse  $4,18 \pm 0,03$  GeV), so ist die wahrscheinliche CP-Verletzung ein starkes Indiz, dass vor allem in dieser Phase das Ungleichgewicht zwischen Materie und Antimaterie entstanden ist. Ursache dürfte die schwache Wechselwirkung sein, der auch die von starker Kernkraft zusammengehaltenen Hadronen unterliegen. Der entsprechende Zeitpunkt wird bestimmt durch den Hadron-Phasenübergang

Transformationen. Diese Forderung geht tief in die Gruppentheorie hinein, weil sie von der Theorie fordert, dass Abbildungen (Homomorphismen) eines Objektes, hier Naturgesetzes, auf sich selbst umkehrbar eindeutig sind (bijektiv). Bijektive Homomorphismen nennt man Isomorphismen; Isomorphismen auf sich selbst nennt man Automorphismen. Gute Beispiele solcher homomorpher Theorien sind die Spezielle Relativitätstheorie oder die Quantenelektrodynamik QED, also im weitesten Sinne die Theorie des Elektrons. Speziell wurden in diesem Beitrag mit dem Begriff „isomorph“ Gruppenisomorphismen erwähnt. Dies kann man verallgemeinern.

152 Bildnachweis: Erstellt vom Autor.



bei  $10^{12}$  K und  $10^{-5}$  s nach dem Urknall (s.a. Abb. 35, 36), bei dem Nukleonen (und Mesonen) entstanden und nur die stabilen Nukleonen Proton und Neutron aus up und down Quarks übrig blieben. Ideal wäre es allerdings, wenn ein Ungleichgewicht gegenüber Materie direkt z.B. beim neutralen Antiwasserstoff-Atom nachweisbar wäre. Im Gegensatz zu geladenen Teilchen ist es sehr schwierig, in einer Falle ausreichend viele und ausreichend lange Antiwasserstoffatome zu speichern, um präzise Messungen ausführen zu können. Hier sind beim ALPHA-Experiment des CERN Fortschritte erzielt worden. Allerdings zeigt es sich bisher, dass die CPT-Symmetrie mit einer Genauigkeit von  $2 \cdot 10^{-10}$  erhalten bleibt. Das experimentelle Prinzip der sogenannten Laserspektroskopie wird aber sicherlich in Zukunft noch weitere und präzisere Untersuchungen möglich machen. Dies gilt sogar für mögliches unterschiedliches Verhalten von Materie und Antimaterie in neuen Gravitationstheorien<sup>153</sup>.

Symmetrie und Symmetriebrechung sind insbesondere von entscheidender Bedeutung in der Kosmologie geworden. Sie spielen, wie bereits angesprochen, bei einigen Theorien eine zentrale Rolle, die beschreiben bzw. erklären wollen, wie die vier Grundkräfte Gravitation, starke Wechselwirkung, schwache Wechselwirkung und Elektromagnetismus sich in den ersten Momenten nach dem Urknall entwickelt haben und vor allem, warum sie solch unterschiedliche Beträge haben. Hier wirkt Temperaturerhöhung so, dass die Kräfte ununterscheidbar werden und ein Zustand höherer Symmetrie entsteht. Man kann mit Fug und Recht sagen, dass sich mit dem Begriff der Symmetrie die grundlegenden Fragen zur frühen Geschichte unseres Universums verbinden

---

153 Ahmadi, M. et. al.: Observation of the  $1S-2S$  Transition in Trapped Antihydrogen. In: Nature 541, S. 506-510, 2016. Nach Spektrum der Wissenschaft 7.17, S. 30-32.

## **Fazit:**

Symmetrie ist in allen Naturwissenschaften ein Zustand größerer Ordnung. Es genügen weniger Sprachmittel, um einen Zustand mit größerer Symmetrie zu beschreiben. Die mathematische Beschreibung ist in der Regel allgemein, also disziplinübergreifend, anwendbar. Allerdings haben die einzelnen wissenschaftlichen Disziplinen unterschiedliche Anforderungen an Ordnungsprinzipien. Terminologien unterscheiden sich und können verwirren. Die Kristallographie untersucht strenge, stereometrische Formen in der Natur. Die Gruppentheorie liefert die Hilfsmittel zur vollständigen Systematisierung. In der Chemie können die Symmetrieeigenschaften von ganzen Molekülen komplexer sein, weisen insgesamt oft nur Punktsymmetrie auf und sind oft nur lokal begrenzt anwendbar. Hier ist die Wahl der Methode entscheidend, um z.B. bei der IR-Spektroskopie lokale Schwingungsverhältnisse mehr oder weniger theoretisch unabhängig von der Gesamtsymmetrie des Moleküls messen zu können. Mit Punktgruppen auf Basis der Gruppentheorie lassen sich Symmetrieeigenschaften aller Moleküle vollständig und umfassend klassifizieren. Am wenigsten trägt in der Biologie die mathematische Beschreibung bei. Oft muss der Symmetriebegriff sehr weit gefasst werden oder es sind starke Idealisierungen erforderlich. Hier empfindet und schätzt der Naturliebhaber aber die Symmetrie besonders, aber nicht nur, als ästhetisches Kriterium in der Biodiversität. In den genannten Naturwissenschaften geht es ausschließlich um die Symmetrie räumlicher Strukturen.

Physiker verstehen Symmetrie jedoch allgemeiner als ein Mehr an Freiheitsgraden und vor allem als Invarianz von Erhaltungsgrößen gegenüber Transformationen bei den Naturgesetzen. Die Frage nach Symmetrie ist immer die Frage nach Erhaltungsgrößen. Klassisches Beispiel ist der Phasenübergang, bei dem der kristalline Zustand (durch Abkühlung) formal geringere Ordnung aufweist, weil er durch feste Winkel und andere Parameter Restriktionen unterliegt. Grundlegend ist die Erhaltung von Energie, Impuls und Drehimpuls. In der modernen Physik sind konkrete Größen, wie z.B. der Spin, aber auch abstrakte Symmetrien, wie die Parität, Erhaltungsgrößen.

Die Palette an mathematisch-naturwissenschaftlichen Disziplinen ist damit übrigens keineswegs vollständig. Im vorliegenden Beitrag wurde die Skalensymmetrie weitgehend ausgeklammert. Dabei hat sich in den letzten Jahrzehnten in Verbindung mit den Begriffen Selbstähnlichkeit, Chaos und Fraktalen ein riesiger Bereich der mathematisch-naturwissenschaftlichen und auch technischen Forschung aufgetan, der in zahlreiche Einzeldisziplinen hineinreicht. Es gibt durchaus Bezüge zur geometrischen Gruppentheorie, die sich aber der plakativen Gliederung dieses Beitrages entziehen.

## Verzeichnis der wichtigsten im Text verwendeten Abkürzungen

!	Zeichen für Fakultät; $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$
(+), (−)	Moderne Darstellungsweise für rechts- und für linksdrehend
$\bar{\nu}_e$	Elektronantineutrino
$K_L^0$	neutrale Kaonen (siehe auch K-Mesonen)
$L_P$	Planck-Länge (ca. $10^{-35}$ m), analog Planck-Zeit $T_P$ (ca. $10^{-44}$ s) bzw. Planck-Masse $M_P$ (ca. $2,17 \cdot 10^{-8}$ kg)
$\Lambda_B^0$	Teilchen, besteht aus einem up-, einem down- und einem beauty-Quark (auch bottom-Quark genannt)
{A, B, C, D}	Permutationsdarstellung einer hier vierelementigen Menge. Erster Buchstabe kennzeichnet die Ecke links unten; dann nummeriert man weiter gegen den Uhrzeigersinn, d.h. mathematisch positiv.
	Zeichen für „parallel“
$\in$	Zeichen für „Element aus“
$\sphericalangle$	Zeichen für Winkel
$\triangleq$	Zeichen für „entspricht“
○	Zeichen bezeichnet in diesem Beitrag die Verknüpfung der Symmetrioperationen
↓	botanisches Zeichen für zygomorph
$2\pi$	entspricht $360^\circ$ , hier die Identität bei Drehungen
$3m$	Punktgruppe nach der Hermann-Mauguin Terminologie; entspricht $C_{3v}$ (nach Schoenflies).
ART	Allgemeine Relativitätstheorie
$a_x^{-1}$	Inverses Element von $a_x$ d.h. es gilt $a_x \circ a_x^{-1} = i$
B-Mesonen	Quark/Antiquark Teilchen, die ein beauty-Quark oder sein Antiteilchen und das jeweilige u- oder d-Quark (bzw. Antiquarks) enthalten
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
C	siehe auch CPT, P, T, Umkehr der Ladung, entspricht Vertauschung eines Teilchens gegen sein Antiteilchen
$C_{3v}$	Punktgruppe mit 3-zähliger Drehachse und drei vertikalen Spiegelebenen
$C_4$	Drehachse, hier vierzählig
CDM	Cold Dark Matter, nicht elektromagnetisch wechselwirkende, hypothetische Materieform
CERN	Europäisches Kernforschungszentrum (bei Genf)
CPT	C = Ladungskonjugation, P = Räumliche Spiegelung, T = Zeitumkehr
d	wird meist als Symbol für eine Drehung verwendet; als Elementarteilchen ist das d(own)-Quark gemeint

D(extro)	rechtsdrehend
D <sub>4</sub>	Diedergruppe, z.B. eines regelmäßigen Vierecks/Quadrates; wird oft auch als D <sub>8</sub> bezeichnet, da sie 2x4=8 Elemente hat.
D <sub>4h</sub>	Punktgruppe nach Schoenflies
DNA	Desoxyribonukleinsäure, Molekül als Träger der Erbinformation
dp	beim Raman Effekt bedeutet dp depolarisiert
e <sup>-</sup>	Elektron
E(10)	Mathematische Gruppe, die in der Nähe des Urknalls zur Vereinigung der vier Grundkräfte vermutet wird (String-Theorie).
ESR	Elektronenspinresonanz, misst Änderung des Elektronenspinzustandes oder Hyperfeinzustandes.
eV	Elektronenvolt
exp(x)	steht für die Exponentialfunktion $f(x)=e^x$ mit der Euler'schen Konstanten e als Basis
GeV	Gigaelektronenvolt, 10 <sup>9</sup> eV
GUT	Grand Unified Theory, Theorie zur Vereinigung von starker, schwacher und elektromagnetischer Kraft
h	Planck'sches Wirkungsquantum
Hg.	Herausgeber
HIV	Humanes Immundefizienz-Virus
HTML	Hypertext Markup Language (englisch für Hypertext-Auszeichnungssprache), ist eine textbasierte Sprache zur Strukturierung digitaler Dokumente
i oder I	Identitätsabbildung, z.B. Drehung um 0 Grad, in Formeln ist $i=\sqrt{-1}$
Im(c)	Imaginärteil einer komplexen Zahl c
IR	Infrarot-Spektroskopie, neben dem Raman-Effekt die Messung von Schwingungen in Molekülen
K	Kelvin, Grad über dem absoluten Nullpunkt
K <sup>+</sup> , K <sup>-</sup>	Kaonen, K-Mesonen, die ein strange-Quark enthalten (z.B. $\bar{u}s$ , $u\bar{s}$ )
†	botanisches Zeichen für disymmetrisch (90° gedreht)
L(evo)	linksdrehend
LCAO	linear combination of atomic orbitals
LHC	Large Hadron Collider, Teilchenbeschleuniger am CERN
LHCb	Large Hadron Collider beauty, Teilchendetektor am CERN
M <sub>2</sub> ( $\mathbb{C}$ )	bedeutet 2x2 Matrizen mit komplexen Werten
MOND	Modifizierte Newton'sche Dynamik, stellt die Existenz von Dunkler Materie infrage.
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
NMR	Kernresonanz-Spektroskopie
O(2)	Untergruppe der Drehungen um eine ausgezeichnete Achse
O(3)	orthogonalen Gruppe, also volle Rotationssymmetrie im Raum

p	polarisiert beim Raman Effekt, Proton in der Teilchenphysik
P	Parität, Symmetrie bzgl. Spiegelung am Ursprung, Vorzeichenumkehr der Raumkoordinaten, siehe auch CPT, T.
$Q_8$	Gruppe der Quaternionen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
Rac	Racemat, Mischung aus rechtsdrehend und linksdrehend
Raman	Beim Raman-Effekt (RE) bzw. der Raman-Spektroskopie geht es um inelastische Streuung von Licht an molekularen, kristallinen oder amorphen Substanzen.
Re(c)	Realteil einer komplexen Zahl c
$R_z$	Rotation um die z-Achse, analog $R_x$ , $R_y$
s, ms	Sekunde(n), Millisekunde(n)=tausendstel Sekunde
$SU(2) \times U(1)$	Eichgruppe der elektroschwachen Theorie
$SU(3)$	Eichgruppe der Quantenchromodynamik (starke Kernkraft)
SuSy	Supersymmetrie
T	Symmetrie bzgl. Zeitumkehr; Vorzeichenumkehr der Zeitkoordinate, siehe auch CPT, C, P.
$T_d$	Tetraeder-Punktgruppe
TeV	Teraelektronenvolt, $10^{12}$ eV
$T_x$	Translation parallel zur x-Achse, analog $T_y$ , $T_z$
$\bar{u}$	Antiquark zum u-Quark, analog $\bar{d}$ , Antiteilchen des d-Quarks
$U(1)$	globale Eichsymmetriegruppe, sog. Kreisgruppe, also alle Drehungen um einen Punkt im 2-Dimensionalen
u-Quark	Up-Quark, Elementarteilchen, neben d(own)-Quark Bestandteil der „normalen“ Materie; $\bar{u}$ und $\bar{d}$ bezeichnen die Antiteilchen
VB	Valenzbindung
$W^+$ , $W^-$ , Z	Überträger der schwachen Kraft
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	Verknüpfung von 3 zyklischen Gruppen der Ordnung 2, geschrieben $\mathbb{Z}_2^3$ ; analog $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ für Ordnung 2 verknüpft mit Ordnung 4.
$\mathbb{Z}_8$	Zyklische Gruppe, hier mit 8 Elementen
$\alpha$ , $\beta$ , $\gamma$	Winkel in Kristallsystemen
$\beta^-$ -Zerfall	Beta-Minus Zerfall, radioaktiver Zerfall u.a. zu Elektronen
$\Delta p$	Impulsunschärfe
$\delta_s$	bzw. $\delta_{as}$ steht für symmetrische bzw. asymmetrische Deformationsschwingungen
$\Delta x$	Ortsunschärfe
$\Lambda$	Lambda steht für die sog. kosmologische Konstante
$v_s$	(bzw. $v_{as}$ ) sind symmetrische bzw. asymmetrische Valenzschwingungen, also schwingende Veränderungen des Bindungsabstandes.

$\pi^-$ bzw. $\pi^+$	Pionen ( $\pi$ -Mesonen), $\pi^+ \triangleq u\bar{d}$ , $\pi^- \triangleq \bar{u}d$ , $\pi^0 \triangleq$ Überlagerung $d\bar{d}$ mit $u\bar{u}$
$\pi$	Kreiszahl 3,14..., $\pi$ -Elektronen sind delokalisierte Elektronen in chemischen Bindungen.
$\sigma$	z.B. $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , Symbol für eine Spiegelung
$\hbar$	gesprochen h-quer, Planck'sches Wirkungsquantum $h/2\pi$

## **Glossar**

(unterschiedlich besetzter Begriffe in den einzelnen Fachdisziplinen)

Legende:

(B)=Biologie, (C)=Chemie/Molekülphysik/Kristallographie, (M)=Mathematik, (P)=Physik

### Chiral:

(B) „spiegelbildlich“ (siehe Beispiel „Hände“, daher das Synonym „Händigkeit“); (C) unterschiedlicher Drehsinn bei ansonsten gleichen Molekülen; (P) Händigkeit, bei Vertauschung einer der 3 Ortsvariablen bzw. der Spinvariablen wechselt die Wellenfunktion von Bosonen nicht das Vorzeichen wechseln; bei Fermionen dagegen schon.

### Dieder:

(M) Di-edergruppen haben die Form  $D_{2k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . In der Mathematik werden synonym zwei Nomenklaturen  $D_n$  und  $D_{2n}$  verwendet; z.B.  $D_4$ , wenn der Schwerpunkt auf den Drehungen eines Quadrates liegt oder  $D_8$  wenn die Anzahl an Elementen (hier 8) hervorgehoben werden soll. In diesem Beitrag wird  $D_n$  (z.B.  $D_4$ ) verwendet. (C) Bezeichnung nach Schoenflies folgt einer eigenen Systematik und kann differieren.

### Enantiomere:

(C) bis auf den Drehsinn gleiche Moleküle; (B) Bedeutung in Biologie und Pharmazie mit weitergehenden Aspekte (z.B. unterschiedlicher Geruch, Geschmack, Toxizität, Stoffwechseleigenschaften etc.).

### Invers/Inversion:

(M) In der Gruppentheorie ergibt die Verknüpfung eines Elementes mit seinem inversen Element wieder das neutrale Element der Gruppe bzgl. der Verknüpfung. (C) Punktspiegelung, wird oft mit i=Inversion abgekürzt. Die Punktgruppe  $C_i$  entspricht der Punktgruppe  $S_2$ , also eine 2-zählige Drehspiegelachse als einzigem Symmetrieelement (triklin-pinakoidal).

### Isomerie:

(B) Korrelation eines Parameters (z.B. Gewicht der Leber) mit dem Körpergewicht; (C) unterschiedliche Moleküle bzw. Substanzen mit gleicher Summenformel (Konstitutionsisomerie), Enantiomere und Diastereomere haben gleiche Summenformel und Struktur (Konfigurationsisomerie), wobei sich nur Enantiomere wie Bild und Spiegelbild verhalten. Die dritte Gruppe sind Konformationsisomere, bei denen kein Bindungsbruch, sondern nur die Rotation um eine Einfachbindung nötig ist, um in eine andere Struktur zu kommen. Weitere Differenzierungen und ausführliche Strukturierung siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Isomerie> (05.06.2017).



Isomorph/Isomorphie:

(C) Kristalle mit gleichen Strukturen auf molekularer Ebene und damit Voraussetzung für Mischkristalle; (M) hier meist Gruppen mit gleicher Struktur, die sich durch eine bijektive Abbildung umkehrbar eindeutig ineinander überführen lassen.

Neutral:

(M) neutrales Element, Verknüpfung mit jedem Element der Gruppe ergibt wieder Element; (P) Teilchen trägt keine Ladung (insbesondere elektrische Ladung).

Parität:

(M) Eigenschaft einer ganzen Zahl ob sie gerade oder ungerade ist; (P) Invarianz gegenüber Raumspiegelung (siehe auch Signum).

Signum:

(M) Vorzeichen (gerade, ungerade), Anzahl Transpositionen in einer Permutation; (C) irreduzible Abbildung bzgl. Anzahl Transpositionen in einer Permutation in der Charaktertafel; (P) Aussage zur Parität.

Symmetrisch:

(M) spezielle Bedeutung symmetrische Gruppe  $S_n$  für die Drehungen eines regelmäßigen n-Ecks; (C) Ein Molekül ist genau dann symmetrisch ist, wenn es im Raum mindestens zwei nichtunterscheidbare Orientierungen gibt; (P) Invarianz von Erhaltungsgrößen gegenüber Transformationen bei den Naturgesetzen.

Translationssymmetrisch:

(M) z.B. Sinus-Funktion bzgl. Verschiebung entlang der x-Achse; (C) periodische Verschiebungen im Kristallgitter ohne Konsequenzen für die sog. Elementarzelle; (P) Invarianz bzgl. Koordinatentransformationen des Raumes.

## Literaturhinweise:

Für eine umfassende Literatursammlung zum Thema Symmetrie siehe  
<http://vismath2.tripod.com/denes1/index.html>

Dénes Nagy: Symmetro-graphy (Bibliographic section)

Symmetry:

A bibliography of interdisciplinary books

(university-textbooks, scholarly monographs, popular-scientific works)

About 600 books in 25 languages

Adams, Fred, Laughlin, Greg; Die fünf Zeitalter des Universums, dtv München 2002.

Alder, Ken; Das Maß der Welt, Bertelsmann München 2002.

Ananthaswamy, Anil; Reisen an die Grenzen der Physik, Spektrum Akademischer Verlag, 2012.

Andretsch, Jürgen, Mainzer, Klaus (Hg.) Philosophie und Physik der Raumzeit, B I Wissenschaftsverlag Mannheim Wien Zürich 1988.

Barrow, John D.; Das 1x1 des Universums, Rowohlt TB 2006.

Berry, M.; Kosmologie und Gravitation, Teubner Stuttgart 1990.

Börner, Gerhard; Kosmologie, Fischer Kompakt, Frankfurt/M. 2002.

Clegg, Brian; Vor dem Urknall, rowohlt, Reinbek bei Hamburg, 2012.

Close, Frank; Antimaterie, Spektrum Akademischer Verlag, 2009.

Close, Frank; Neutrino Spektrum Akademischer Verlag, 2010.

Coulson, C.A.; Die chemische Bindung, S. Hirzel Verlag Stuttgart 1969.

Dawkins, Richard; Geschichten vom Ursprung des Lebens, Ullstein, Berlin 2008.

Feynman, Richard P.; QED, Piper München Zürich 1990.

Feynman, Richard P.; Vom Wesen physikalischer Gesetze, Piper München Zürich 1993, 11. Auflage.

Finkelburg, Wolfgang; Einführung in die Atomphysik, 11.&12.Auflage Springer Berlin Heidelberg New York 1967.

Fischer, Ernst Peter; Brücken zum Kosmos, Libelle Verlag 2004.

Genz, Henning; Die Entdeckung des Nichts, Hanser München Wien 1994.

Genz, Henning; Elementarteilchen, Fischer Frankfurt/M. 2003.

Genz, Henning; Nichts als das Nichts, Wiley-VCH Weinheim 2004.

Genz, Henning; Wie die Naturgesetze Wirklichkeit schaffen, Hanser München Wien 2006.

Gisin, Nicolas; Der unbegreifliche Zufall, Springer Spektrum, dt. Übersetzung im Springer Verlag, Heidelberg 2014.

Glosauer, Tobias; Elementare Gruppentheorie, Springer Spektrum, Wiesbaden 2016.

- Greene, Brian; Das elegante Universum, Siedler Berlin 2000.
- Greene, Brian; Der Stoff, aus dem der Kosmos ist, Rowohlt, Reinbek bei Hamburg 1998.
- Gubser, Stephen S.; Stringtheorie, Spektrum Akademischer Verlag 2010.
- Guilini, Domenico, Kiefer, Claus; Gravitationswellen, Springer Spektrum Wiesbaden 2017.
- Haeckel, Ernst; "Kunstformen der Natur", Prestel Verlag, München, New York: Online unter [www.fisch-blog.blog.de](http://www.fisch-blog.blog.de), (1998).
- Haeckel, Ernst; Kunstformen der Natur, Leipzig und Wien, Verlag des Bibliographischen Instituts, (1899).
- Halling, Horst, Möller, Rolf; Mathematik fürs Auge, Spektrum akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, Oxford, 1995.
- Heisenberg, Werner; Ordnung der Wirklichkeit, Serie Piper, München 1989.
- Hermann, Dieter; Antimaterie, C.H.Beck, 4. Auflage 2009.
- Hetznecker, Helmut; Kosmische Strukturbildung, Spektrum Akademischer Verlag, 2009.
- Hildebrandt, Dieter; Die Sonne, dtv München 2010.
- Hollas, J. Michael; Die Symmetrie von Molekülen, Walter de Gruyter, Berlin New York 1975.
- Hooper, Dan; Dunkle Materie, Spektrum Akademischer Verlag, 2009.
- Janka, Hans Thomas; Supernovae und kosmische Gammablitze, Spektrum Akademischer Verlag, 2010.
- Kean, Sam; Die Ordnung der Dinge, Hoffmann & Campe, Hamburg 2010.
- Kiefer, Claus; Der Quantenkosmos, S. Fischer, 3. Auflage 2009
- Kiefer, Claus; Quantentheorie, Fischer Frankfurt/M. 2003.
- Krauss, Lawrence M.; Ein Universum aus Nichts, Knaus München 2013.
- Krauss, Lawrence M.; Schwarze Materie, Insel TB, Frankfurt/M. Leipzig 1998.
- Laine Mikko; Symmetrien in der Physik, Vorlesungsskript, Fakultät für Physik, Universität Bielefeld, Stand: 22. Oktober 2005.
- Layzer, David; Das Universum, Spektrum Akademischer Verlag, 1989.
- Lederman, Leon, Schramm David N.; Vom Quark zum Kosmos Spektrum Akademischer Verlag, 1980.
- Lederman, Leon; (Teresi, Dick); Das Schöpferische Teilchen, Goldmann 1995.
- Lesch, Harald (Hg.); Die Entdeckung des Higgs-Teilchens, Bertelsmann München 2013.
- Lesch, Harald; Müller, Jörn; Kosmologie für helle Köpfe, Goldmann 2. Aufl. 2006.
- Lincoln, Don; Die Weltmaschine, Spektrum Akademischer Verlag, 2011.
- Linde, Andrei; Elementarteilchen und inflationärer Kosmos, Spektrum Akademischer Verlag, 1993.

- Mayer-Kuckuk, Theo; Der gebrochene Spiegel, Birkhäuser Basel Boston Berlin 1989.
- Ne'eman, Yuval, Kirsh, Yoram; Die Teilchenjäger, Springer 1990.
- Ostendorff, Eberhard; Steine in Farben, Otto Maier Verlag Ravensburg.
- Päs, Heinrich; Die perfekte Welle (Neutrinoforschung), Piper München 2011.
- Pauldrach, Adalbert; Dunkle kosmische Energie, Spektrum Akademischer Verlag, (Springer 2011).
- Pauling, Linus; Die Natur der chemischen Bindung, Verlag Chemie, Weinheim 1968.
- Penrose, Roger; Computerdenken, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1991.
- Penrose, Roger; Der Weg zur Wirklichkeit, Spektrum Akademischer Verlag 2005.
- Penrose, Roger; Zyklen der Zeit, Springer Heidelberg 2011.
- Pesch, Hans Josef; Schlüsseltechnologie Mathematik, G. B. Teubner, Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden 2002.
- Randall, Lisa; Die Vermessung des Universums, S. Fischer Verlag Frankfurt/M. 2012.
- Randall, Lisa; Dunkle Materie und Dinosaurier, S. Fischer Verlag, Frankfurt/M. 2016.
- Randall, Lisa; Verborgene Universen, S: Fischer Verlag, Frankfurt/M., 2006.
- Rees, Martin; Das Rätsel unseres Universums, C.H.Beck München 2003.
- Rees, Martin; Vor dem Anfang, S. Fischer Frankfurt/M. 1998.
- Reichholf, Josef H.; Der Ursprung der Schönheit – Darwins größtes Dilemma, dtv, München 2013.
- Rovelli, Carlo; Die Wirklichkeit, die nicht so ist, wie sie scheint, Rowohlt 2016, Reinbek bei Hamburg.
- Rowan-Robinson; Das Flüstern des Urknalls, Spektrum Akademischer Verlag, 1994.
- Scarani, Valerio; Physik in Quanten, Spektrum Akademischer Verlag und Elsevier München 2007.
- Schilthuizen, Menno; Darwins Peep Show, dtv München, 2014.
- Schumann, Walter; Steine und Mineralien, BLV Verlagsgesellschaft, München – Bern – Wien, 1974.
- Schwichtenberg, Jakob; Durch Symmetrie die moderne Physik verstehen, Springer Spektrum, Berlin 2017.
- Silk, Joseph; Der Urknall, Birkhäuser Springer 1990.
- Smolin, Lee; Im Universum der Zeit, DVA 2014.
- Smolin, Lee; Warum gibt es die Welt, C.H.Beck, München 1999.
- Spanner, Günter; Das Geheimnis der GRAVITATIONSWELLEN; Kosmos Stuttgart 2016.

- Spektrum der Wissenschaft, 03/2016, Stephen Ornes, Die Rettung des Riesentheorems, S.48 ff.
- Spektrum der Wissenschaft, 06/2016, S.32, Sabine Hossenfelder, Quantengravitation.
- Spektrum der Wissenschaft: Verständliche Forschung, Elementare Materie, Vakuum und Felder, 1988.
- Spektrum der Wissenschaft: Verständliche Forschung, Gravitation, 1987.
- Spektrum der Wissenschaft: Verständliche Forschung, Kosmologie und Teilchenphysik, 1990.
- Spektrum der Wissenschaft: Verständliche Forschung, Teilchen, Felder und Symmetrien 1988.
- Susskind, Leonhard; Der Krieg um das schwarze Loch, Suhrkamp Berlin 2010.
- Tarassow, L.; Symmetrie, Symmetrie! Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg Berlin Oxford 1993.
- Thompson, D'Arcy Wentworth; Über Wachstum und Form, Verlag Ab - Die Andere Bibliothek Bd.255 (2002).
- Thorne, Kip S.; Gekrümmter Raum und verbogene Zeit, Droemer Knauer München 1994.
- Troll, Wilhelm; Allgemeine Botanik, Ferdinand Enke Verlag Stuttgart, 2. Auflage 1954 und 4. Auflage, 1973.
- Ullmann, John; Quantengravitation, Die Theorie des Higgs-Teilchens, epubli GmbH, Berlin 2015.
- Vaas, Rüdiger; Jenseits von Einsteins Universum, Kosmos, Stuttgart 2015.
- Weidlein, Johann, Müller, Ulrich, Dehnicke, Kurt; Schwingungsspektroskopie, Georg Thieme Stuttgart New York 1982.
- Weinberg, Stephen; Die ersten drei Minuten, dtv-Taschenbuch, 1987.
- Weinberg, Stephen; Teile des Unteilbaren, Spektrum Akademischer Verlag, 1984.
- Weizsäcker, C.F. von; Zum Weltbild der Physik, S. Hirzel Stuttgart, 13. Aufl. 1990.
- Wheeler, John Archibald; Gravitation und Raumzeit, Spektrum Akademischer Verlag, 1992.
- Zeilinger, Anton; Einsteins Schleier, Goldmann, München März 2005.
- Zeilinger, Anton; Einsteins Spuk, Goldmann, München Febr. 2007.

## Abbildungsnachweise:

- Abb. 1 Einzelbilder: [openclipart.org/detail/34045/kugel-orange](https://openclipart.org/detail/34045/kugel-orange),  
[de.wikipedia.org/wiki/ Schnee#/media/File:Schnee1.jpg](https://de.wikipedia.org/wiki/Schnee#/media/File:Schnee1.jpg),  
[de.wikipedia.org/wiki/ Large\\_Hadron\\_Collider](https://de.wikipedia.org/wiki/Large_Hadron_Collider),  
[de.wikipedia.org/wiki/Zauberwürfel](https://de.wikipedia.org/wiki/Zauberw%C3%BCrfel) (23.06.2017).
- Abb. 2 Erstellt vom Autor
- Abb. 3 Erstellt vom Autor
- Abb. 4 Erstellt vom Autor
- Abb. 5 Erstellt vom Autor
- Abb. 6 Kristallsystem: Name: Formel: Bildnachweis  
Triklin: Albit:  $\text{Na[AlSi}_3\text{O}_8]$ : [de.wikipedia.org/wiki/Albit](https://de.wikipedia.org/wiki/Albit)  
(Natronfeldspat)  
Monoklin: Gips:  $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ : [de.wikipedia.org](https://de.wikipedia.org)  
Orthorhombisch: Schwefel: S:  
[de.wikipedia.org/wiki/Schwefel#/media/File:Sulfur-t07-67a.jpg](https://de.wikipedia.org/wiki/Schwefel#/media/File:Sulfur-t07-67a.jpg)  
Tetragonal: Zirkon:  $\text{Zr[SiO}_4]$ : [de.wikipedia.org/wiki/Zirkon](https://de.wikipedia.org/wiki/Zirkon)  
Trigonal: Quarz:  $\text{SiO}_2$ : [de.wikipedia.org/wiki/Quarz](https://de.wikipedia.org/wiki/Quarz)  
Hexagonal: Beryll:  $\text{Al}_2\text{Be}_3[\text{Si}_6\text{O}_{18}]$ : [de.wikipedia.org/wiki/Beryll](https://de.wikipedia.org/wiki/Beryll)  
Kubisch: Halit:  $\text{NaCl}$ : Steinsalz: [de.wikipedia.org/wiki/Halit](https://de.wikipedia.org/wiki/Halit)  
(01.02.2017).
- Abb. 7 Oben: [alfs-mineralien.de/tl](https://alfs-mineralien.de/tl); Grafiken der Kristallformen mit  
freundlicher Genehmigung von Mineralien Bremen, Herr Alfred  
Schäfer (01.02.2017), Tabelle unten erstellt vom Autor.
- Abb. 8 Erstellt vom Autor
- Abb. 9 Bildquelle Fuchsin: [cs.wikipedia.org](https://cs.wikipedia.org) (01.02.2017).
- Abb. 10 Erstellt vom Autor
- Abb. 11 Erstellt vom Autor
- Abb. 12 Erstellt vom Autor
- Abb. 13 Erstellt vom Autor
- Abb. 14 Erstellt vom Autor nach Hollas, Tab. 4.11
- Abb. 15 Erstellt vom Autor, Kalottenmodell  $\text{NH}_3$  siehe  
[commons.wikimedia.org/wiki/File:Ammonia-3D-vdW.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ammonia-3D-vdW.png)
- Abb. 16 Erstellt vom Autor
- Abb. 17 Erstellt vom Autor
- Abb. 18 Erstellt vom Autor
- Abb. 19 nach Hollas, J. Michael; Die Symmetrie von Molekülen, zur  
Charaktertafel von  $\text{C}_{3v}$  siehe Hollas, Tabelle 4.12, S. 66.
- Abb. 20 IR-Spektrum ergänzt um die Beschriftung von Schwingungen  
siehe [www.nist.gov/chemistry](https://www.nist.gov/chemistry) (Ammonia, 07.05.2017).
- Abb. 21 Erstellt vom Autor nach einer Skizze von Johann Weidlein, Ulrich  
Müller, Kurt Dehnicke, Schwingungsspektroskopie, Thieme  
Verlag, Stuttgart New York, 1982, S. 103.
- Abb. 22 Bildquellen:  
[de.wikipedia.org/wiki/Nelkengewächse](https://de.wikipedia.org/wiki/Nelkengew%C3%A4chse) (*Stellaria media*, radiär),  
[de.wikipedia.org/wiki/Lippenblütler](https://de.wikipedia.org/wiki/Lippenbl%C3%BCtler) (*Leucas aspera*, zygomorph),  
[de.wikipedia.org/wiki/Tränendes Herz](https://de.wikipedia.org/wiki/Tr%C3%A4nendes_Herz) (*Lamprocapnos spectabilis*,

- disymmetrisch),  
de.wikipedia.org/wiki/Strelitzien (*Strelitzia reginae*, asymmetrisch),  
(23.06.2017).
- Abb. 23 Bildquelle Lilie: de.wikipedia.org/wiki/Madonnen-Lilie (*Lilium  
candium*, 18.06.2017).
- Abb. 24 Bildquelle: de.wikipedia.org/wiki/Hepatitis-B-Virus (24.06.2017).
- Abb. 25 Oben:  
Nach einer Zeichnung von Leonardo da Vinci in Luca Pacioli's  
„De Divina Proportione“, Ausgabe von 1509, S. 241;  
Bildnachweis: <https://archive.org/details/divinaproportion00paci>.  
Unten:  
Unten: Bildquelle <http://www.3d-meier.de/tut12/Seite3.html>.  
Mit freundlicher Genehmigung von Herrn Jürgen Meier.
- Abb. 26 Bildquelle: Ernst Haeckel, Kunstformen der Natur.  
[caliban.mpipz.mpg.de/haeckel/kunstformen/haeckel\\_kunstformen  
\\_der\\_natur.pdf](http://caliban.mpipz.mpg.de/haeckel/kunstformen/haeckel_kunstformen_der_natur.pdf) (Page 65, Tafel 1, Ausschnitt, letzter Abruf für Abb.  
26-28 am 19.06.2017). Dieses Buch wurde von [www.BioLib.de](http://www.BioLib.de)  
produziert. Es steht unter dem Schutz der GNU Free Document  
License. Weitergabe und Kopieren sind ausdrücklich erwünscht.
- Abb. 27 Bildquelle: ebenda, Page 0 (Titel) und Page 65, Tafel 1 (ganz).
- Abb. 28 Bildquelle: ebenda, Page 126 /Tafel 21 und Page 226 / Tafel 51.
- Abb. 29 Bildnachweis der Strukturformeln: de.wikipedia.org, Stichwort  
Milchsäure (14.01.2017).
- Abb. 30 Bildquelle: Troll, Wilhelm, Allgemeine Botanik, Ferdinand Enke  
Verlag Stuttgart, 4. Auflage, 1973, Abb. 79, S. 99.  
Mit freundlicher Genehmigung durch die Georg Thieme Verlag KG  
als Rechtsnachfolger des Ferdinand Enke Verlags.
- Abb. 31 Bild- und Textquelle: Zeichnungen von Ernst Haeckel aus dem  
Jahr 1866, Thema „Polyaxonie und homopole Grundformen“.  
In : Ernst Haeckel, »Generelle Morphologie der Organismen.  
Allgemeine Grundzüge der Organischen Formen-Wissenschaft,  
mechanisch begründet durch die von Charles Darwin reformierte  
Descendenz-Theorie«. Erster Band : Allgemeine Anatomie der  
Organismen, Berlin, 1866.  
Neu abgedruckt im Vorwort von Olaf Breidbach zu: Die  
allerreizendsten Tierchen Haeckels Radiolarien-Atlas von 1862, in  
Ernst Haeckel, Kunstformen der Natur – Kunstformen aus dem  
Meer, PRESTEL München London New York, 2011, S. 22.
- Abb. 32 Erstellt vom Autor
- Abb. 33 Bildnachweis:  
[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1c/Standard\\_M  
odel\\_of\\_Elementary\\_Particles-de.svg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1c/Standard_Model_of_Elementary_Particles-de.svg) (08.04.2016).
- Abb. 34 Vaas, Rüdiger: Jenseits von Einsteins Universum. Franckh-  
Kosmos Verlag 2015, S. 397 zit. nach M. Blagojević, F. W. Hehl  
(Hrsg.): Gauge Theories of Gravitation. Imperial College Press  
2013.



- In freundlicher Abstimmung mit dem Franck-Kosmos Verlag wurde die Grafik 1:1 vom Autor umgesetzt (Bildzitat).
- Abb. 35 Nach Helmut Satz, Kosmische Dämmerung, C.H.Beck, München 2016, S. 87. In freundlicher Abstimmung mit dem C.H.Beck Verlag wurde die Grafik 1:1 vom Autor umgesetzt (Bildzitat).
- Abb. 36 Nach Helmut Satz, Kosmische Dämmerung, C.H.Beck, München 2016, S. 88. In freundlicher Abstimmung mit dem C.H.Beck Verlag wurde die Grafik 1:1 vom Autor umgesetzt (Bildzitat).
- Abb. 37 Vom Autor erstellt nach einer Grafik unter [https://de.wikipedia.org/wiki/Große\\_vereinheitlichte\\_Theorie](https://de.wikipedia.org/wiki/Große_vereinheitlichte_Theorie) (01.02.2017).
- Abb. 38 Bildquelle: [de.wikipedia.org/wiki/Spontane\\_Symmetriebrechung](https://de.wikipedia.org/wiki/Spontane_Symmetriebrechung)
- Abb. 39 Erstellt vom Autor

**Danke** (in alphabetischer Reihenfolge)

Herzlicher Dank geht an Herrn **Prof. Dr. Nico Blüthgen** vom Fachbereich Biologie der Technischen Universität Darmstadt. Er hat mich entgegen meiner Zweifel ermuntert, den Biologieteil trotz geringer Bezüge zur Gruppentheorie weiter zu verfolgen. Seine interessanten und wichtigen Hinweise, ergänzt um aussagekräftige Originalarbeiten, haben die Impulse geliefert um einige Defizite im Text zu beseitigen.

Besonderer Dank geht an Frau **Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Evamarie Hey-Hawkins** vom Institut für Anorganische Chemie der Universität Leipzig. Unsere langjährige freundschaftliche Verbundenheit hat ihren Blick nicht für viele verbesserungswürdige Details verstellt, die durch ihre aufmerksamen und klugen Hinweise korrigiert werden konnten.

Dankeschön für das mathematische Kurzgutachten an Herrn **Prof. Dr. Ralf Köhl** vom mathematischen Institut der Justus-Liebig Universität.

Man musste eine massive Unterforderung für ihn als Algebraiker befürchten, denn es handelt sich in diesem Beitrag um elementarste Gruppentheorie. Doch seine interessanten und brandaktuellen Hinweise und Literaturstellen, vor allem zu mathematischen Fortschritten in der theoretischen Physik, haben den Artikel bereichert.

Herrn **Florian Ruckelshausen**, Fachreferent an der Universitätsbibliothek Gießen, danke ich für seine Hilfe die Untiefen des Urheberrechts zu vermeiden.

Herr **Prof. Dr. Andreas Schrimpf** von der Philipps-Universität Marburg hat sich freundlicherweise für den Physikteil als Gutachter zur Verfügung gestellt.

Aber er war mir vielmehr ein sehr guter Mentor.

Mit seinem Strukturierungsvorschlag hat er innere Ordnung in das Manuskript gebracht. Seine wertvollen Vorschläge im Detail haben wesentlich zur Fokussierung beigetragen.

Ich bin ihm zu großem Dank verpflichtet.

Wie so oft hat Herr **Dr. Michael Serafin** dankenswerterweise deutlich mehr getan, als es seine Pflicht als Schriftleiter der Oberhessischen Naturwissenschaftlichen Zeitschrift erfordert hätte. Als gelernter Chemiker und Kristallograph an der Justus-Liebig Universität in Gießen hat er mir wichtige Anstöße gegeben.

## **Zitate**

*Das Erste, des Zäzilie beflissen,  
ist dies: sie nimmt von Tisch und Stuhl die Bücher  
und legt sie Stück auf Stück, wie Taschentücher,  
jeweils nach bestem Wissen und Gewissen.*

*Desgleichen ordnet sie die Schreibereien,  
die Hefte, Mappen, Bleis und Gänsekiele,  
vor Augen nur das eine Ziel der Ziele,  
dem Genius Ordnung das Gemach zu weihen.*

*Denn Sauberkeit ist zwar nicht ihre Stärke,  
doch Ordnung, Ordnung ist ihr eingeboren.  
Ein Scheuerweib ist nicht an ihr verloren.  
Dafür ist Symmetrie in ihrem Werke.*

*Christian Morgenstern  
(1871 - 1914)<sup>154</sup>*

*Die Symmetrie ist diejenige Idee, mit deren Hilfe der Mensch im Laufe der  
Jahrhunderte versuchte, Ordnung, Schönheit und Vollkommenheit zu  
begreifen und zu schaffen.*

*Hermann Weyl (1885 - 1955)<sup>155</sup>*

## **Widmung:**

*Herrn Prof. Dr. Dr. h.c. Kurt Dehnicke (1931 - 2011) in dankbarer Erinnerung.*

---

154 Christian Morgenstern: Alle Galgenlieder, Insel Verlag, Leipzig 1938, Zäzilie.

155 Zitiert nach <http://www.alt.mathematik.uni-mainz.de/Members/mattheis/listen/mathphorismen> (03.12.2016).